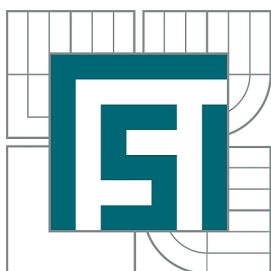


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
ENERGY INSTITUTE

## ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH HYDRAULICKÝCH SÍTÍ SOLUTION OF NON-LINEAR HYDRAULIC NETWORKS

DIZERTAČNÍ PRÁCE  
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ing. DANIEL HIMR

VEDOUČÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Prof. Ing. FRANTIŠEK POCHYLÝ, CSc.

BRNO 2011



## Abstrakt

V práci je popsán způsob řešení nestacionárního proudění v hydraulických systémech, které mají dominantní jednu složku rychlosti. Tyto systémy mohou být libovolně strukturované a nejsou omezeny počtem prvků. Samotný výpočet probíhá metodou *Lax – Wendroff* a umožňuje uvažovat proměnnou rychlost zvuku v závislosti na změnách statického tlaku i na vlastnostech potrubí, takže řešená hydraulická soustava může být velmi různorodá.

Dále je v práci podrobně popsána samotná numerická metoda a její citlivost na velikost časového a délkového kroku, nikoliv z pohledu stability, ale z pohledu numerického útlumu a jeho porovnání s druhou viskozitou kapaliny.

Na uvedených numerických postupech byl sestaven počítačový software s pracovním názvem *Řáz*, který umožňuje v poměrně krátkém čase namodelovat libovolnou potrubní síť a vypočítat proudění kapaliny v ní.

## Abstract

Thesis deals about solution of non-steady flow in hydraulic systems, which have one dominant component of velocity. Such systems can be arbitrarily structured and they are not limited by number of elements. Computation is based on *Lax – Wendroff method* and enables considering of variable sound speed as function of static pressure and properties of pipe material. It means, that hydraulic system can be very various.

Numerical method is described in detail and description is also focused on sensitivity of method for time step and length step. It can be very imported for evaluation of numerical viscosity, which is compared with second viscosity of fluid.

*Hammer* is working title of software, which was developed on the basis of written numerical procedures. This software enables fast computation of flow in pipe-line systems.

**Klíčová slova:** 1D proudění, hydraulický systém, rychlost zvuku, Lax – Wendroff, útlum

**Key words:** 1D flow, hydraulics system, sound speed, Lax – Wendroff, damping



## Prohlášení

Prohlašuji, že dílo je původní, vypracované pouze autorem za podpory Odboru fluidního inženýrství Victora Kaplana.



## Poděkování

Děkuji všem, kteří mi s mojí prací pomáhali, zejména však Doc. Vladimíru Habánovi, jehož rady byly neocenitelné, a mému vedoucímu Prof. Františkovi Pochylému.





# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Základní odvození</b>	<b>2</b>
2.1	Matematický úvod . . . . .	2
2.2	Rovnice kontinuity – část 1. . . . .	4
2.3	Silové účinky tekutiny na pružnou trubici . . . . .	5
2.3.1	Voigtův (Kelvinův) model tělesa . . . . .	7
2.4	Rovnice kontinuity – část 2. . . . .	8
2.5	Pohybová rovnice pro 1D proudění . . . . .	9
2.6	Nestacionární tření . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Rychlost zvuku</b>	<b>12</b>
3.1	Čistá kapalina . . . . .	12
3.2	Směs kapalina-plyn . . . . .	12
3.3	Problém hmotnostního poměru . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Numerické řešení</b>	<b>16</b>
4.1	Stabilita numerické metody . . . . .	20
4.2	Paměťová funkce . . . . .	20
4.3	Okrajové podmínky . . . . .	21
4.3.1	Průtoková podmínka . . . . .	22
4.3.2	Tlaková podmínka . . . . .	22
4.3.3	Odpor . . . . .	22
4.3.4	Vyrovňovací nádrž . . . . .	24
4.3.5	Plynový akumulátor . . . . .	24
4.3.6	Spoj více trubek . . . . .	26
4.3.7	Čerpadlo . . . . .	27
4.3.8	Nahrazení charakteristik čerpadla . . . . .	29
4.3.9	Turbína . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Numerická viskozita</b>	<b>33</b>
5.1	Rovnice silové rovnováhy pro viskózní kapalinu . . . . .	34
5.2	Stanovení numerické viskozity . . . . .	35
5.3	Vyhodnocení numerického útlumu . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Program <i>Ráz</i></b>	<b>44</b>
6.1	Příprava úlohy. . . . .	44
6.2	Zpracování výsledků. . . . .	46
6.3	Export a import dat . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Experiment</b>	<b>48</b>
7.1	Případ první. . . . .	48
7.2	Případ druhý . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>53</b>
	<b>Reference</b>	<b>55</b>
	<b>Symbolika</b>	<b>56</b>



# 1 Úvod

Proudění v potrubí je jedním ze složitých problémů v praktických aplikacích hydromechaniky. Základní rovnice lze zjednodušit na jednorozměrný případ, protože dominantní složka rychlosti je ve směru osy trubky, nicméně vyvstávají specifické komplikace.

První a nejvíce zřejmá je složitost potrubního systému, který může být zcela libovolně větvený a může se skládat z rozličných prvků. Namátkou lze vyjmenovat několik nejdůležitějších: čerpadlo, turbína, ventil, vyrovnávací nádrž, plynový akumulátor, spoj více trubek a nesmí být opomenuta vlastní trubka.

Potrubí se může sestávat z trubek různých průměrů, délek, materiálů, mají vlastní tloušťku a drsnost stěny, která má svoji pružnost a pohybuje se při změnách tlaku a ne vždy je tento pohyb zanedbatelný. Při výpočtech je tedy nezbytné uvažovat také interakci mezi kapalinou a stěnou potrubí.

Výše uvedený nástin situace vede na hyperbolický problém soustavy parciálních diferenciálních rovnic, které mají nenulovou pravou stranu. Jedná se o tzv. nehomogenní soustavu. Existují různé numerické přístupy k řešení a pravděpodobně nejpoužívanější je *metoda charakteristik*. V této práci je využita *metoda Lax – Wendroff*, která nabízí určité výhody. Jednou z nich je možnost jednoduchého zavedení proměnné rychlosti zvuku v závislosti na tlaku.

## 2 Základní odvození

Při matematickém popisu problému se vychází ze základních zákonů: zachování hmoty a energie. Postupným zaváděním různých předpokladů se upraví na problematiku jednodimenzionálního proudění kapaliny, které lze předpokládat v potrubním systému. Nejprve je vhodné uvést rychlé seznámení s některými statemi matematiky.

### 2.1 Matematický úvod

#### Einsteinova sumační symbolika

Albert Einstein si pro zjednodušení psaní vektorů zavedl indexovou symboliku a na následujících řádcích je její přehled.

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &\equiv a_i \\
 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &\equiv A_{ij} \\
 c = \vec{a} \cdot \vec{b} &\equiv c = a_i \cdot b_i \\
 \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &\equiv c_i = \varepsilon_{ijk} \cdot a_j \cdot b_k \\
 \vec{b} = A \cdot \vec{a} &\equiv b_i = A_{ij} \cdot a_j \\
 \vec{b} = \text{rot}(\vec{a}) &\equiv b_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \\
 \vec{b} = \text{grad}(a) &\equiv b_i = \frac{\partial a}{\partial x_i} \\
 b = \text{div}(\vec{a}) &\equiv b = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}
 \end{aligned}$$

Při výpočtech pomocí sumační symboliky jsou využívány dva speciální tenzory. První z nich je *Kroneckerův tenzor*  $\delta$ , druhý je *Levi-Civitův tenzor*  $\varepsilon$ , které mají následující vlastnosti:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

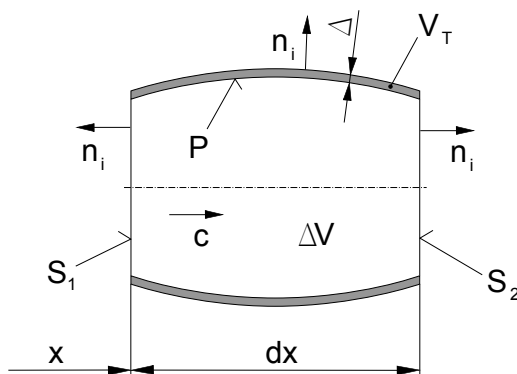
*Kroneckerův tenzor* je symetrický to znamená, že  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ . Oproti tomu *Levi-Civitův tenzor* je antisymetrický ve všech třech indexech, takže  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}$ .

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k = 1, 2, 3 \vee 2, 3, 1 \vee 3, 1, 2 \\ -1 & i, j, k = 3, 2, 1 \vee 2, 1, 3 \vee 1, 3, 2 \\ 0 & i = j \vee i = k \vee k = j \end{cases} \quad (2)$$

#### Gaussova-Ostrogradského věta

*Gaussova-Ostrogradského věta* udává vztah mezi plošným a objemovým integrálem spojitě uzavřené oblasti. Pokud  $\sigma$  je funkce definovaná v celé oblasti, pak platí (3). Příklad takové oblasti může být na obrázku 1 a pod funkcí  $\sigma$  si lze představit třeba tlak. Přesná definice a důkaz je k nalezení např. v [19].

$$\iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \iint_S \sigma_{ij} n_j dS \quad (3)$$



Obrázek 1: Element trubky

Tento vztah je využit v [18] při derivaci objemového integrálu pro případ, že objem závisí na čase, jak popisuje rovnice (4).

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(x, t) dV = \iiint_{V(t)} \left( \frac{df}{dt} + f \frac{\partial c_i}{\partial x_i} \right) dV \quad (4)$$

$$f = \rho \cdot \Psi \quad (5)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial c_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

Symbol  $\Psi$  v rovnici (5) může být libovolná spojitá funkce v oblasti  $V$ . Po dosazení rovnice (5) do (4) s využitím rovnice kontinuity (6) se po několika úpravách obdrží vztah (7):

$$\iiint_{V(t)} \rho \frac{d\Psi}{dt} dV = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \Psi dV \quad (7)$$

Pro zvláštní případ, kdy  $f = 1$  lze poslední vztah zjednodušit:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} dV = \frac{d}{dt} V(t) = \iiint_{V(t)} \frac{\partial c_i}{\partial x_i} dV \quad (8)$$

Po aplikaci (3) vznikne velmi důležitá rovnice:

$$\frac{dV}{dt} = \oint_{S(t)} c_i n_i dS \quad (9)$$

Časová změna objemu je rovna toku plochou, která tvoří hranici daného objemu.

### Laplaceova transformace

K řešení některých typů obyčejných diferenciálních rovnic je vhodné využít *Laplaceovy transformace*. Při tom se předpokládá, že  $f(t)$  je integrovatelná funkce v intervalu  $0 \leq a \leq b < \infty$ . Rovnice (10) uvádí *Laplaceovu transformaci* a (11) naopak *zpětnou Laplaceovu transformaci*.

$$F(s) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f(t) \exp(-st) dt \quad (10)$$

$$f(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\omega}^{\alpha + i\omega} F(s) \exp(st) ds \quad (11)$$

Podrobnosti jsou opět k nalezení v [19] a zejména v [17].

### Věta o derivaci konvoluce

Věta o derivaci konvoluce, známé jako *Duhamelův integrál*, je popsána vztahem (12) a platí, pokud funkce  $f$  a  $\sigma$  jsou spojitými funkcemi pro  $t \in \langle 0; \infty \rangle$ . Důkaz je k nalezení v [17].

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) \sigma(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) \frac{d\sigma(t - \tau)}{dt} d\tau + f(t) \sigma(0_+) \quad (12)$$

### Derivace

Možná je vhodné upozornit, že v hydromechanice je výhodné pracovat s Eulerovým pojetím kontinua a tedy podle toho derivovat:

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial c_i}{\partial x_j} c_j \quad (13)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} c_i \quad (14)$$

## 2.2 Rovnice kontinuity pro tekutinu v pružné trubici (1. část)

Rovnice kontinuity popisuje zákon o zachování hmoty v systému. V tomto případě se jedná o systém kapalina – potrubí a jeho element je zobrazen na obr. 1. Odvození je převzaté z [18].

Je uvažováno tenkostěnné potrubí, které se může deformovat a kterým protéká kapalina rychlostí  $c$ . Rovnici kontinuity pro oblast s proměnným objemem  $\Delta V$  lze napsat např. ve tvaru (15).

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Delta V} \rho dV = 0 \quad (15)$$

Pokud se využije věta o střední hodnotě integrálního počtu, může být integrál nahrazen součinem objemu a střední hustoty.

$$\frac{d}{dt} [\rho(\alpha) \Delta V] = 0; \alpha \in \Delta V \quad (16)$$

Po rozepsání derivace součinu a využití vztahu (9) vznikne rovnice v následujícím tvaru:

$$\frac{d\rho(\alpha)}{dt} \Delta V + \rho(\alpha) \oint_{S(t)} c_i n_i dS = 0 \quad (17)$$

Plošný integrál je součtem integrálů přes všechny plochy uzavírající oblast o objemu  $\Delta V$  a lze ho tedy rozepsat následujícím způsobem:

$$\oint_{S(t)} c_i n_i dS = \iint_{S_1} c_i n_i dS + \iint_{S_2} c_i n_i dS + \iint_P c_i n_i dS = Q_1 + Q_2 + \iint_P c_i n_i dS \quad (18)$$

Plocha  $P$  představuje vnitřní stěnu potrubí, plochy  $S_1$  a  $S_2$  vstupní a výstupní průřezy, jak je znázorněno na obr. 1. Před dalším postupem bude výhodné si vyjádřit objem  $\Delta V$  a průtok  $Q_2$  a dosadit za ně do (17) s využitím (18).

$$\Delta V(t) = S(x, t) dx$$

$$Q_2 = Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x} dx$$

$$\frac{d\rho(\alpha)}{dt}Sdx + \rho(\alpha)\left(-Q + Q + \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \iint_P c_i n_i dS\right) = 0 \quad (19)$$

Protože průtok  $Q$  by měl všude pouze index „1“, tak je, v zájmu zjednodušení, uveden bez něj. Pro malé změny tlaku lze použít vztah mezi hustotou a tlakem:

$$\frac{dp}{dt} = v_0^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (20)$$

Po dosazení do (19) a podělení elementem délky  $dx$  vznikne výsledný tvar rovnice kontinuity pro tekutinu v pružné trubici.

$$\frac{1}{v_0^2} \frac{dp(\alpha)}{dt} S + \rho(\alpha) \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho(\alpha) \frac{\iint_P c_i n_i dS}{dx} = 0 \quad (21)$$

V rovnici (21) zbyl jeden problém a tím je plošný integrál v posledním zlomku. Jeho řešení je rozebráno v podkapitole 2.3 a dokončení v 2.4, protože je třeba nejprve definovat chování stěny potrubí.

### 2.3 Silové účinky tekutiny na pružnou trubici

Pro popis trubice je postačující obr. 1 a postupovat lze opět podle [18]. Pohybová rovnice pro pevné těleso může mít následující tvar:

$$\rho_T \frac{d^2 u_i}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \Sigma_{ij} = \rho_T g_i \quad (22)$$

Za předpokladu, že potrubí má dostatečně tenkou stěnu vzhledem k průřezu, lze zanedbat účinky setrvačnosti  $\frac{d^2 u_i}{dt^2}$  a gravitace, takže (22) se zjednoduší na:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Sigma_{ij} = 0; \quad \forall x_j \in V_T \quad (23)$$

Aby byl vztah (23) úplný je třeba definovat okrajové podmínky:

1. Pro vnitřní povrch potrubí, při zanedbání smykových sil, se tenzor napětí rovná tenzoru normálových napětí:

$$\Sigma_{ij} n_j^* = \sigma_{ij} n_j^*; \quad \forall x_j \in P \quad (24)$$

Tento tenzor se vyjádří pomocí tlaku kapaliny:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}; \quad \forall x_j \in P$$

Normálový vektor k povrchu tělesa odpovídá opačně orientovanému normálovému vektoru kapaliny, takže okrajová podmínka pro vnitřní stěnu potrubí má tvar:

$$\sigma_{ij} n_j^* = p n_i; \quad \forall x_j \in P \quad (25)$$

2. Pro vnější povrch trubky má, při nulovém vnějším zatížení, okrajová podmínka tvar:

$$\Sigma_{ij} n_j^* = 0; \quad \forall x_j \in S_T \quad (26)$$

Po vynásobení rovnice (23) rychlostí trubice se obdrží výkon vnitřních sil. Po integraci a využití *Gauss-Ostrogradského věty* vznikne vztah:

$$\oint_S \Sigma_{ij} n_j^* v_i dS - \iiint_{V_T} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Sigma_{ij} dV = 0 \quad (27)$$

Tenzor  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  je rozložitelný na symetrickou a antisymetrickou část.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= v_{ij} + y_{ij} \end{aligned}$$

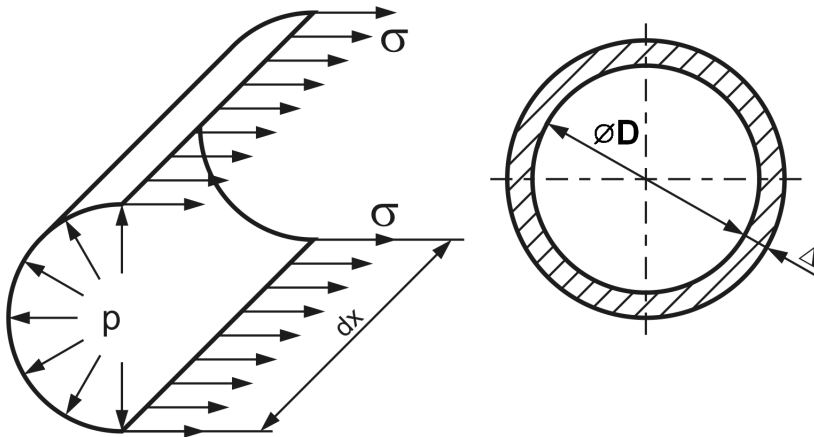
Součin symetrického a antisymetrického tenzoru je roven nule a tedy vztah (27) lze upravit za využití (24), (25) a (26) na:

$$\oint_S p n_i v_i dS = \iiint_{V_T} \Sigma_{ij} v_{ij} dV \quad (28)$$

Poslední výraz může být dále upraven. Tlak na vnější stěně potrubí je předpokládán nulový, takže stačí integrovat jen přes vnitřní povrch. Dále je využit předpoklad, že tlak je v celém průřezu a na povrchu potrubí konstantní. Pokud se ještě přidá podmínka, že kapalina dokonale lpí na stěně, může se psát:

$$p \iint_P c_i n_i dS = \iiint_{V_T} \Sigma_{ij} v_{ij} dV \quad (29)$$

Poslední rovnice je poměrně důležitá, protože udává vztah mezi napětím v trubici a tlakem a rychlostí kapaliny, která jí protéká.



Obrázek 2: Napětí ve stěně potrubí [16]

Až do tohoto okamžiku bylo odvození platné pro potrubí jakéhokoliv průřezu. Nyní se omezí pouze na kruhovou trubku (stále je třeba mít na paměti, že musí být tenkostěnná) a tedy lze využít teorii tenkostěnných nádob, takže se bude uvažovat jednoosá napjatost v tečném směru (obr. 2). Výraz  $\Sigma_{ij} v_{ij}$  se zjednoduší podle vztahu (30).

$$\Sigma_{ij} v_{ij} = \Sigma_{11} v_{11} = \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (30)$$



Rovnice silové rovnováhy pro tenkostěnnou trubku kruhového průřezu:

$$pDdx = 2\sigma\Delta dx \quad (31)$$

a tedy napětí ve stěně je dáno vztahem:

$$\sigma = \frac{D}{2\Delta}p \quad (32)$$

Z rovnice (30) se dosadí do (29) a s využitím (32) postupně vznikne (34).

$$p \iint_P c_i n_i dS = \iiint_{V_T} \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} dV \quad (33)$$

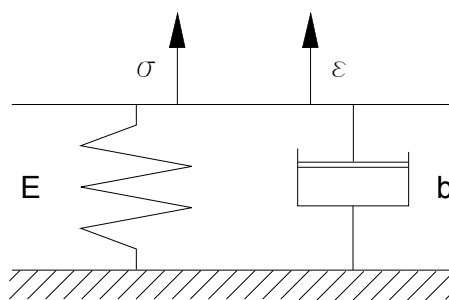
$$\iint_P c_i n_i dS = \iiint_{V_T} \frac{D}{2\Delta} \frac{d\varepsilon}{dt} dV \quad (34)$$

Po provedení integrace přes objem elementu trubky podle obr. 2 se obdrží následující rovnice, jejíž úpravou vznikne vztah mezi deformací potrubí a rychlostí kapaliny, která je ve styku se stěnou (35).

$$\begin{aligned} \iint_P c_i n_i dS &= \frac{D}{2\Delta} \frac{d\varepsilon}{dt} \pi D \Delta dx \\ \iint_P c_i n_i dS &= \frac{\pi D^2}{2} \frac{d\varepsilon}{dt} dx \end{aligned} \quad (35)$$

### 2.3.1 Voigtův (Kelvinův) model tělesa

Pro sestavení fyzikálního modelu pevného tělesa je nezbytné definovat jeho chování při zatěžování. V tomto případě bude postačující popis pomocí modulu pružnosti a odporu proti pohybu. Pokud je zvolen podle obr. 3, tak se jedná o *Voigtův* někdy nazývaný *Kelvinův model tělesa*, který použil ve své práci [16]. Praxe ukazuje, že zapojení elasticity a odporu paralelně je postačující a není třeba konstruovat složité systémy s několika odpory a několika elasticitami.



Obrázek 3: Voigtův (Kelvinův) model tělesa

S respektováním obrázku 3 platí rovnice (36).

$$\sigma = E\varepsilon + b \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (36)$$

Po *Laplaceově transformaci* a vyjádření deformace se získá:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{E + sb} \quad (37)$$

Po zpětné Laplaceově transformaci vznikne výraz (38), který se po následné derivaci podle (12) a s využitím (32) upraví na (40).

$$\varepsilon = \frac{1}{b} \int_0^t \sigma(t-\tau) \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau \quad (38)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{b} \left[ \int_0^t \frac{d\sigma(t-\tau)}{dt} \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau + \sigma(0) \exp\left(-\frac{E}{b}t\right) \right] \quad (39)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{D}{2b\Delta} \left[ \int_0^t \frac{dp(t-\tau)}{dt} \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau + p(0) \exp\left(-\frac{E}{b}t\right) \right] \quad (40)$$

Pokud se integrál v mezích  $\langle 0, t \rangle$  rozdělí na dva integrály v mezích  $\langle 0, \Delta t \rangle$  a  $\langle \Delta t, t \rangle$ , tak lze napsat (42) za předpokladu, že derivace tlaku  $\frac{dp}{dt}$  je konstantní na krátkém intervalu  $\langle 0, \Delta t \rangle$ .

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{D}{2b\Delta} \left[ \int_0^{\Delta t} \frac{dp(t-\tau)}{dt} \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau + \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-\tau)}{dt} \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau + p(0) \exp\left(-\frac{E}{b}t\right) \right] \quad (41)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{D}{2b\Delta} \left[ \frac{dp}{dt} \int_0^{\Delta t} \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau + \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-\tau)}{dt} \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau + p(0) \exp\left(-\frac{E}{b}t\right) \right] \quad (42)$$

Nyní nezbyvá nic jiného než integrovat první integrál a získat finální vztah, pro výpočet rychlosti deformace potrubí na základě změny tlaku:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = & \frac{D}{2E\Delta} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{b}\Delta t\right) \right] \frac{dp}{dt} + \\ & + \frac{D}{2b\Delta} \left[ \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-\tau)}{dt} \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau + p(0) \exp\left(-\frac{E}{b}t\right) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

## 2.4 Rovnice kontinuity pro tekutinu v pružné trubici (2. část)

V části 2.2 byla rovnice kontinuity upravena na tvar (21), ve kterém se vyskytuje plošný integrál, jenž lze nahradit vztahem (35), takže vznikne:

$$\frac{1}{v_0^2} \frac{dp}{dt} S + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho \frac{\pi D^2}{2} \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad (44)$$

Mlčky se předpokládá, že průřez potrubí  $S = \frac{\pi D^2}{4}$  se s časem ani místem nemění. Proměnnými jsou tlak, průtok a deformace, ale deformaci lze nahradit za pomoci rovnice (43). To se může zdát, na první pohled, nelogické, protože rovnice se dost zkomplikovala, ale odstranila se tím jedna proměnná, kterou pak není třeba řešit. Na druhé straně je nyní třeba integrovat tlak přes celou časovou oblast.

Tímto problémem se zabýval Panko v [16] a zjistil, že stačí počítat integrál jen přes poměrně krátký časový úsek, ale to už je odbočka k numerickému řešení, které bude popsáno dále.

Po dosazení z (43) do (44) a dosazení za  $S$  vznikne (po úpravě):

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\rho v_0^2} + \frac{D}{E\Delta} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{b}\Delta t\right) \right] \right\} \frac{dp}{dt} + \frac{4}{\pi D^2} \frac{\partial Q}{\partial x} = \\ & = -\frac{D}{b\Delta} \left[ \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-\tau)}{d\tau} \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau + p(0) \exp\left(-\frac{E}{b}t\right) \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Výraz ve složené závorce má význam převrácené hodnoty modulu pružnosti  $1/k$  a výraz na pravé straně je paměťová funkce, která popisuje historii tlakových změn. Tato funkce může být označena jako  $m$  a bude rovna 0 pokud byl tlak stále neměnný.

$$\frac{1}{k} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = m \quad (46)$$

Pro rychlost proudění mnohonásobně menší než je rychlost zvuku lze uvažovat  $\frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{dp}{dt}$  a tedy finální tvar rovnice kontinuity v pružném potrubí vypadá následovně:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = km \quad (47)$$

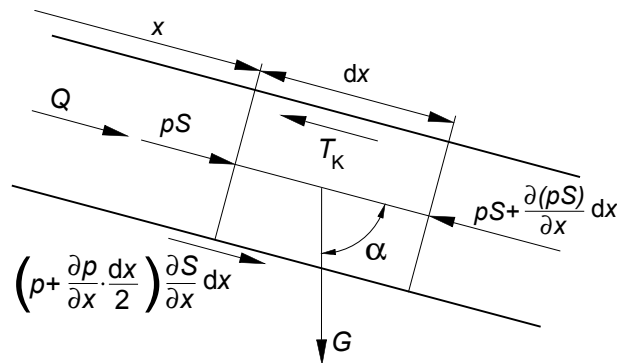
## 2.5 Pohybová rovnice pro 1D proudění

Pro úplný popis proudění kapaliny nestačí pouze rovnice kontinuity, ale je nezbytné také popsat silové poměry v tekutině.<sup>1</sup> K tomu slouží *Navier-Stokesova rovnice* (48), která je odvozena v [2].

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial c_i}{\partial x_j} c_j = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (48)$$

Tato rovnice slouží k výpočtům s viskózní stlačitelnou kapalinou. Pro případ jedno-rozměrného proudění je však zbytečně složitá a výhodnější odvodit je zjednodušenou verzi podle [21].

Na obrázku 4 je znázorněna trubka, kterou protéká kapalina a je na ní vymezen element délky  $dx$ , na kterém musí platit rovnice silové rovnováhy (49).



Obrázek 4: Síly v kapalině [21]

<sup>1</sup>Kromě dvou jmenovaných rovnic se používá ještě stavová a energetická rovnice, ale pro danou problematiku, nemají smysl, protože se uvažuje konstantní teplota a nebude se řešit případná změna skupenství (v potrubních systémech sice může dojít ke kavitaci, ale obecně se jí snažíme vyhnout).

$$pS - \left( pS + \frac{\partial(pS)}{\partial x} dx \right) + \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \frac{\partial S}{\partial x} dx - T_K + G \cos \alpha = \rho S dx \frac{dc}{dt} \quad (49)$$

Symbol  $T_K$  znázorňuje působení třecích sil a  $G$  představuje působení gravitačních sil.

$$T_K = \frac{\pi D \rho}{8} \lambda c |c| dx \quad (50)$$

$$G = \rho g S dx \quad (51)$$

Za předpokladu přímého potrubí konstantního průřezu se úhel  $\alpha$  nemění a  $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ . S uvážením této skutečnosti a rovnic (50) a (51) lze přepsat vztah (49) na:

$$pS - \left( pS + S \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) - \frac{\pi D \rho}{8} \lambda c |c| dx + \rho g S dx \cos \alpha = \rho S \frac{dc}{dt} dx \quad (52)$$

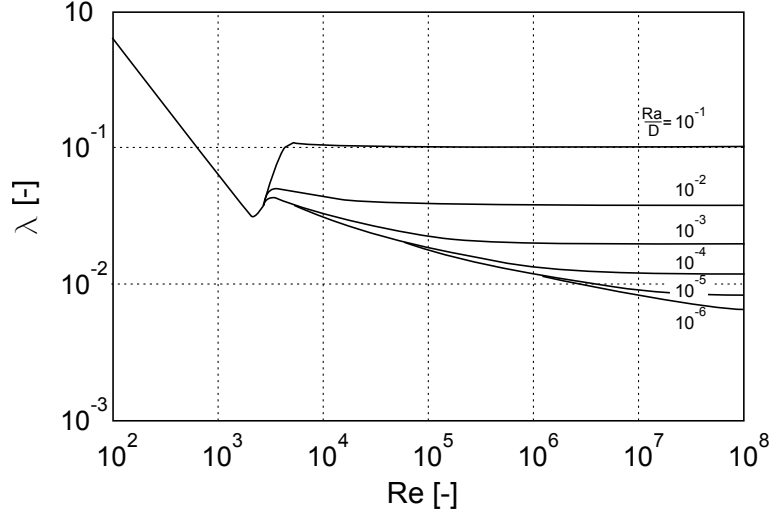
Nyní lze rovnici zjednodušit a s dosazením za rychlost proudění  $c = \frac{Q}{S}$  se získá:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{2DS} Q |Q| = Sg \cos \alpha \quad (53)$$

Za předpokladu, že rychlost proudění je mnohem menší než rychlost zvuku v daném prostředí, lze totální derivaci nahradit parciální a obdržet tak výslednou rovnici silové rovnováhy.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{2DS} Q |Q| = Sg \cos \alpha \quad (54)$$

Součinitel délkových ztrát  $\lambda$  (obr. 5) je různý v závislosti na režimu proudění, přesněji na *Reynoldsově číslu*. Lze ho ale bez obtíží vyčíslit podle vzorce (55), který využívá [15] a doporučuje ho i [20].



Obrázek 5: Součinitel délkových ztrát

$$\lambda = 8 \left[ \left( \frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(A + B)^{1,5}} \right]^{1/12} \quad (55)$$

$$A = \left[ 2,457 \ln \frac{1}{\left( \frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \frac{Ra}{D}} \right]^{16} \quad (56)$$

$$B = \left( \frac{37530}{Re} \right)^{16} \quad (57)$$

## 2.6 Nestacionární tření

Součinitel délkových ztrát  $\lambda$  popisuje tzv. stacionární tření. Při různých přechodových dějích a zejména při vodním rázu se však jedná o silně nestacionární proudění. V takovém případě jsou třecí ztráty vyšší než odpovídá hodnotě  $\lambda$ . Tento jev je podrobně popsán v [22] a [23], kde se autoři odvolávají na [3].

Disipaci energie lze tedy rozdělit na stacionární a nestacionární část. Stacionární část závisí pouze na velikosti *Reynoldsova čísla* a na směru a velikosti rychlosti proudění.

$$J_s = \frac{\lambda}{2DS} Q |Q| \quad (58)$$

Velikost nestacionárních ztrát ovšem závisí také na velikosti a směru zrychlení (lokálního i konvektivního).

$$J_n = \lambda_n \left( \frac{\partial Q}{\partial t} - v_0 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (59)$$

Výsledné třecí ztráty jsou potom dány součtem stacionární a nestacionární části a tlakové pulsace jsou tak více zatlumené. Zajímavé je, že tyto ztráty jsou vyšší pro zrychlující proudění než pro zpomalující.

Nicméně se ukazuje, že vliv nestacionárních ztrát není tak výrazný, aby bylo nezbytné jejich zahrnutí do výpočetního modelu. Mnohem vyšší vliv má tlumení v materiálu potrubí případně druhá viskozita kapaliny. Výraznou roli hraje také vnitřní útlum numerické metody, který je rozebrán v kapitole 5.2.

### 3 Rychlost zvuku

V části 2.4 je odvozena rovnice kontinuity pro proudění v pružném potrubí (45). Vystupuje v ní rychlost zvuku  $v_0$ , která má význam rychlosti zvuku v kapalině v nekonečně velkém objemu nebo v dokonale tuhém potrubí. Nyní nastává problém, jak takovou rychlost určit.

#### 3.1 Čistá kapalina

Ideální kapalina nemůže nabýt rovnovážného stavu při smykovém namáhání a je nestlačitelná, takže rychlost zvuku je nekonečně vysoká. Reálná kapalina ovšem určitou stlačitelnost má a tedy i rychlost zvuku je konečná, nicméně stále dosti vysoká. Její hodnota se pohybuje vysoko nad 1000 m/s a lze ji považovat za konstantní.

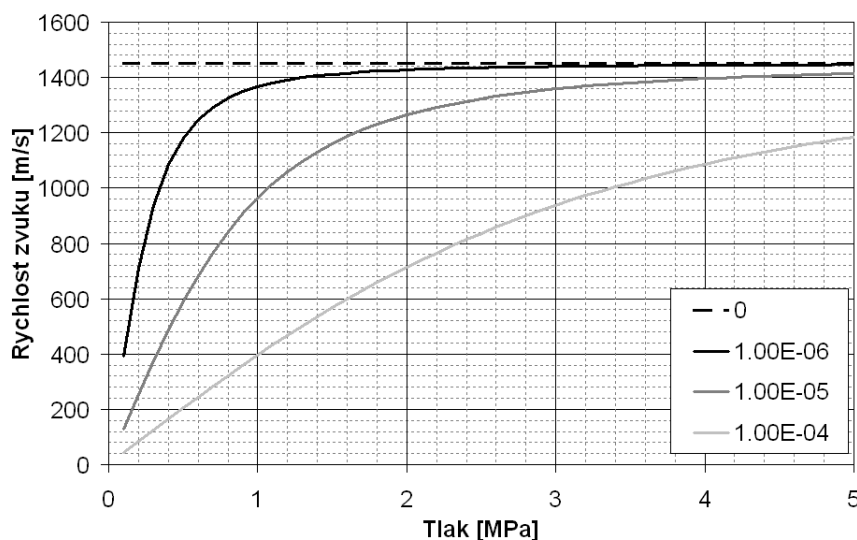
Pokud se úvahy omezí na vodu, jakožto nejběžnější kapalinu, tak se rychlost zvuku mění po přímce od 1480 m/s do 1650 m/s v tlakovém rozmezí 0,1 až 100 MPa. Přesnou závislost je možné vykreslit pomocí vztahů, které jsou publikovány v [12] a na obr. 6 ji znázorňuje čárkovaná čára.

#### 3.2 Směs kapalina-plyn

Zcela odlišná situace nastane pokud je v kapalině obsaženo určité množství plynu. Toto množství může být od 0 do 100 %. Ideální plyn je, na rozdíl od ideální kapaliny, dokonale stlačitelný a adiabatickou rychlost zvuku v plynném prostředí lze vypočítat podle vztahu:

$$v_{0p} = \sqrt{\kappa r T} \quad (60)$$

Na první pohled je zřejmé, že se opět nejedná o závislost na tlaku. Pokud se ovšem bude uvažovat homogenní směs kapaliny a plynu, čili stlačitelné a téměř nestlačitelné složky, tak se rychlost zvuku výrazně mění s měnícím se tlakem. Situaci ilustruje obr. 6 pro různé hmotnostní zlomky vzduchu ve vodě.



Obrázek 6: Rychlost zvuku v závislosti na tlaku [9]

Hustota směsi je dána vztahem (61).

$$\rho_s = \frac{m_k + m_p}{V_k + V_p} \quad (61)$$

Po dosazení za objem plynu  $V_p$  ze stavové rovnice a vyjádření objemu kapaliny pomocí její hustoty vznikne:

$$\rho_s = \frac{m_k + m_p}{\frac{m_k}{\rho} + \frac{m_p r T}{p}} \quad (62)$$

Z rovnice (61) je zřejmé že  $m_p + m_k$  se rovná celkové hmotnosti směsi, takže lze (62) upravit na výsledný vzorec pro hustotu směsi, která je závislá na tlaku a hmotnostním zlomku plynu v kapalině. Pro malý objem plynu je hustota směsi přibližně rovna hustotě kapaliny.

$$\rho_s = \frac{\rho \cdot p}{(1 - M_p)p + M_p r T \rho} \approx \rho \quad (63)$$

Obdobným způsobem jak u hustoty lze postupovat i u modulu pružnosti směsi. Výchozí vztah je poměrným součtem převrácených hodnot modulů elasticity pro plyn a kapalinu:

$$\frac{1}{K_s} = \frac{O_k}{K_k} + \frac{O_p}{K_p} \quad (64)$$

Za předpokladu adiabatického chování plynu platí  $K_p = \kappa p$  a pro kapalinu platí  $K_k = v_{0k}^2 \rho$ . Předchozí rovnici tedy lze přepsat na:

$$K_s = \frac{v_{0k}^2 \rho \kappa p}{v_{0k}^2 \rho O_p + \kappa p O_k} \quad (65)$$

Pokud se objemové zlomky zapíšou jako podíl objemů, za které se dosadí ze stavové rovnice (v případě plynu) a podíl hmotnosti a hustoty v případě kapaliny, vznikne po úpravě vztah pro modul pružnosti směsi:

$$K_s = \frac{[(1 - M_p)p + M_p r T \rho] v_{0k}^2 \kappa p \rho}{v_{0k}^2 \rho^2 M_p r T + \kappa p^2 (1 - M_p)} \quad (66)$$

Opět se jedná o funkční závislost na tlaku a hmotnostním zlomku plynu ve směsi. Výsledná rychlost zvuku ve směsi je dána vztahem:

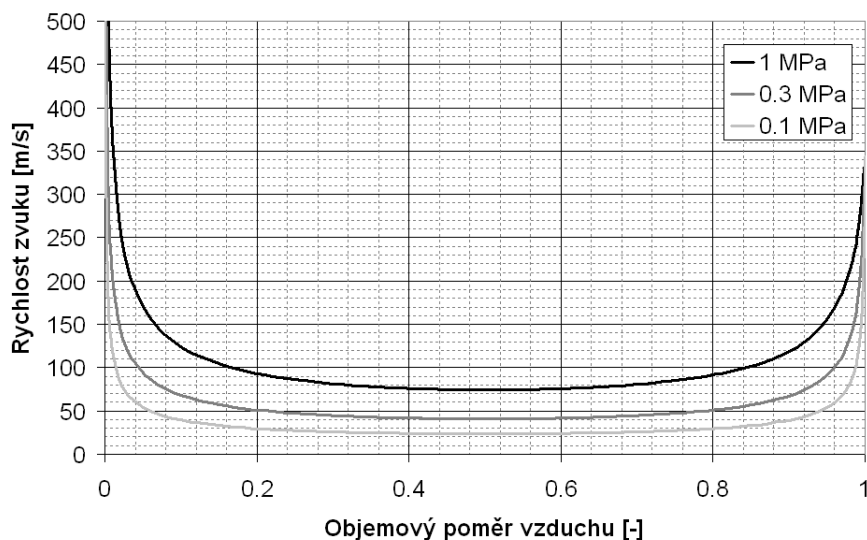
$$v_0 = \sqrt{\frac{K_s}{\rho_s}} \quad (67)$$

Závislost pro konstantní tlak je zobrazena na obr. 6 resp. 7. Jedná se o rychlost zvuku ve vodo – vzdušné směsi. Je zřejmé, že i nepatrné množství plynu v kapalině má za následek výrazný pokles rychlosti zvuku zejména v oblasti nízkých tlaků, jak je zobrazeno na obr. 6. Vykreslené závislosti jsou pro adiabatické chování vzduchu, které je v tomto případě postačující. Podrobnější diskuse takového předpokladu je v [9].

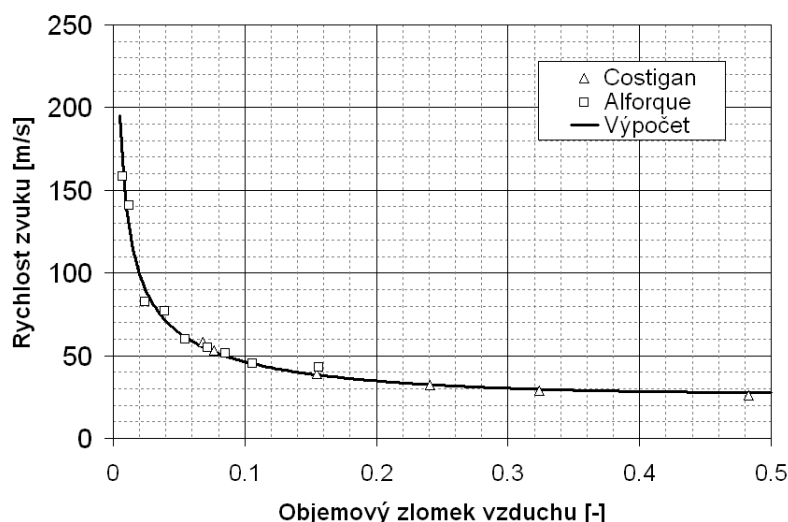
Z obrázku 8 je patrné, že výsledná funkční závislost dobře koresponduje s experimenty, které jsou popsány v [1] a [4].

### 3.3 Problém hmotnostního poměru

Rovnice pro výpočet rychlosti zvuku ve směsi jsou závislé na hmotnostním obsahu vzduchu. V problematice kapalin má již velmi malý objem plynu značný význam, jak je patrné z obr. 7, a je třeba jej stanovit. Měření je možné (v omezené míře) v laboratorních podmínkách a je prakticky nemyslitelné pokud se jedná o dílo. Dále je nutné mít na paměti, že záleží na vzduchu v plynné formě (bublinky), nikoliv rozpuštěném. Nicméně, rozpuštěný plyn se při poklesu tlaku z kapaliny vylučuje a náhle vzrůstá hmotnostní poměr. V opačném případě, při zvýšení tlaku, dochází k rozpouštění a hmotnostní poměr vzduch – voda klesá.



Obrázek 7: Rychlost zvuku v závislosti na množství vzduchu [9]



Obrázek 8: Rychlost zvuku – porovnání s experimentem [10]

Nejvyšší možné množství plynu, které může být rozpuštěné v kapalině, definuje *Henryho zákon* (68), který říká, že parciální tlak plynu  $p_i$  je roven součinu *Henryho konstanty*  $H$  a molového zlomku plynné složky  $x_i$ .

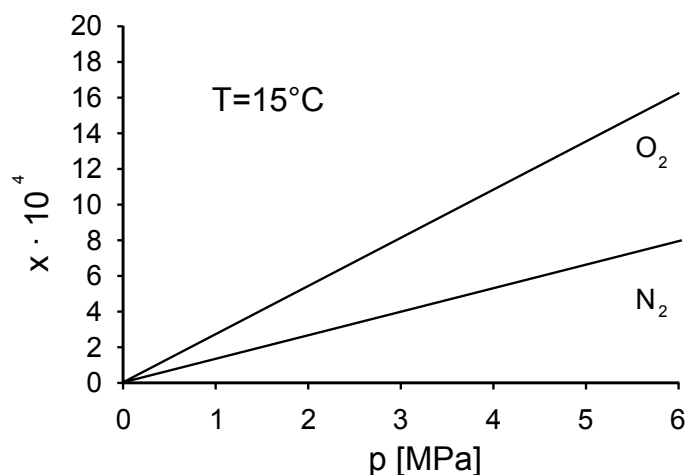
$$p_i = H \cdot x_i \quad (68)$$

Závislost je lineární do cca 10 MPa. Konkrétní hodnota *Henryho konstanty* závisí na teplotě, druhu kapaliny a plynu. Dvě hlavní složky vzduchu (kyslík a dusík) se tedy nerozpouštějí rovnoměrně, jak dokládá graf na obr. 9. Data pro vykreslení závislosti jsou převzata z [11].

Rychlost rozpouštění popisuje *Fickův zákon* (69), který udává rychlost změny látkového množství  $\frac{dn}{dt}$  v závislosti na změně koncentrace  $k$  se vzrůstající vzdáleností  $x$  od rozhraní dvou prostředí o různé koncentraci. Důležitou roli tu hraje difúzní koeficient  $D$  a velikost styčné plochy  $S$ .

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{dn}{dt} = -D \cdot \frac{dk}{dx} \quad (69)$$





Obrázek 9: Závislost rozpustnosti ve vodě

Pokud se na proudění vody v potrubí pohlédne jako na proudění směsi voda + vzduch (dvou látek s různou koncentrací vzduchu), tak neustále probíhá koloběh:

1. Na počátku proudí voda s určitou koncentrací rozpuštěného vzduchu  $k$  a hmotnostním poměrem nerozpuštěného vzduchu  $M_p$
2. Pokud bude tlak narůstat tak se vzduch bude postupně rozpouštět, tzn.  $M_p$  klesá a  $k$  narůstá s určitou rychlostí.
3. V případě poklesu tlaku se rozpuštěný vzduch vyloučí, takže  $M_p$  naroste a  $k$  poklesne. Na rozdíl od předchozího bodu se jedná o rychlý děj.

Z uvedeného vyplývá, že se odvozená závislost rychlosti zvuku se může značně měnit a tudíž je obtížné ji přesně specifikovat.

## 4 Numerické řešení

V předchozích kapitolách byly odvozeny vztahy pro proudění tekutiny v potrubí. Konkrétně se jedná o rovnici kontinuity (47) a pohybovou rovnici (54). Maticový zápis vypadá následovně:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2DS} |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sg \cos \alpha \\ m \end{pmatrix} \quad (70)$$

Vztah lze formálně přepsat na:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{w} = \mathbf{P} \quad (71)$$

K řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu (71) je možné využít numerickou metodu *Lax – Wendroff*. Podrobný rozbor dalších možností řešení je k nalezení ve [14]. Metoda je založena na rozvoji funkce do zkrácené *Taylorovy řady*:

$$f(x_j, t_{k+1}) = f(x_j, t_k) + \Delta t \cdot \frac{\partial f(x_j, t_k)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_j, t_k)}{\partial t^2} \quad (72)$$

Nejprve se upraví (71) tak, aby na levé straně zůstala derivace podle času a rovnice se znovu zderivuje.

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \mathbf{B} \mathbf{w} + \mathbf{P} \quad (73)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\mathbf{K} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x \partial t} - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (74)$$

Po dosazení za časovou derivaci z (73) vznikne:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\mathbf{K} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \mathbf{B} \mathbf{w} + \mathbf{P} \right) - \mathbf{B} \left( -\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \mathbf{B} \mathbf{w} + \mathbf{P} \right) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (75)$$

Výraz (75) se dosadí do (72). Pro přehlednost:  $\mathbf{w}_j^k = \mathbf{w}(x_j, t_k)$  a totéž platí pro vektor  $\mathbf{P}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j^{k+1} &= \mathbf{w}_j^k - \Delta t \left( \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{w}_j^k}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{w}_j^k - \mathbf{P}_j^k \right) + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \left( \mathbf{K} \mathbf{K} \frac{\partial^2 \mathbf{w}_j^k}{\partial x^2} + \mathbf{K} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{w}_j^k}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{w}_j^k}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B} \mathbf{B} \mathbf{w}_j^k - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{P}_j^k}{\partial x} - \mathbf{B} \mathbf{P}_j^k + \frac{\partial \mathbf{P}_j^k}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (76)$$

Derivace se nahradí diferencemi podle následujících formulí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_j^k}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{w}_{j+1}^k - \mathbf{w}_{j-1}^k) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{w}_j^k}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta x^2} (\mathbf{w}_{j+1}^k - 2\mathbf{w}_j^k + \mathbf{w}_{j-1}^k) \\ \frac{\partial \mathbf{P}_j^k}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{P}_{j+1}^k - \mathbf{P}_{j-1}^k) \\ \frac{\partial \mathbf{P}_j^k}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{P}_j^k - \mathbf{P}_j^{k-1}) \end{aligned}$$

Numerické řešení problému (71) v maticovém tvaru je tedy:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j^{k+1} = & \mathbf{w}_j^k - \Delta t \left[ \mathbf{K} \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{w}_{j+1}^k - \mathbf{w}_{j-1}^k) + \mathbf{B} \mathbf{w}_j^k - \mathbf{P}_j^k \right] + \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \begin{aligned} & \mathbf{K} \mathbf{K} \frac{1}{\Delta x^2} (\mathbf{w}_{j+1}^k - 2\mathbf{w}_j^k + \mathbf{w}_{j-1}^k) + \\ & + (\mathbf{K} \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{K}) \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{w}_{j+1}^k - \mathbf{w}_{j-1}^k) + \\ & + \mathbf{B} \mathbf{B} \mathbf{w}_j^k - \mathbf{K} \frac{1}{2\Delta x} (\mathbf{P}_{j+1}^k - \mathbf{P}_{j-1}^k) - \\ & - \mathbf{B} \mathbf{P}_j^k + \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{P}_j^k - \mathbf{P}_j^{k-1}) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (77)$$

Z této rovnice je již možné vyjádřit vztahy pro výpočet průtoku a tlaku v daném uzlovém bodě. Poloha bodu je ve vzdálenosti  $x_j = \Delta x \cdot (j - 1)$  od začátku trubky. Velikost délkového kroku  $\Delta x$  může být libovolná. Přesněji řečeno závisí na délce potrubí a zvoleném počtu výpočetních uzlů  $N$ . Numerické řešení je pak známé pouze v těchto bodech.

$$\begin{aligned} Q_j^{k+1} = & Q_{j-1}^k \frac{\Delta t^2 k}{2\Delta x^2 \rho} + p_{j-1}^k \left( \frac{\Delta t S}{2\Delta x \rho} - \frac{\Delta t^2 \lambda}{8\Delta x D \rho} |Q_j^k| \right) + \\ & + Q_j^k \left[ 1 - \frac{\Delta t \lambda}{2DS} |Q_j^k| - \frac{\Delta t^2 k}{\Delta x^2 \rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t \lambda}{2DS} Q_j^k \right)^2 \right] + \\ & + Q_{j+1}^k \frac{\Delta t^2 k}{2\Delta x^2 \rho} + p_{j+1}^k \left( \frac{\Delta t^2 \lambda}{8\Delta x D \rho} |Q_j^k| - \frac{\Delta t S}{2\Delta x \rho} \right) + \\ & + \Delta t S g \left( 1 - \frac{\Delta t \lambda}{4DS} |Q_j^k| \right) - \frac{\Delta t^2 S k}{4\Delta x \rho} (m_{j+1}^k - m_{j-1}^k) \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} p_j^{k+1} = & Q_{j-1}^k \left( \frac{\Delta t k}{2\Delta x S} - \frac{\Delta t^2 k \lambda}{8\Delta x D S^2} |Q_j^k| \right) + p_{j-1}^k \frac{\Delta t^2 k}{2\Delta x^2 \rho} + \\ & + Q_{j+1}^k \left( \frac{\Delta t^2 k \lambda}{8\Delta x D S^2} |Q_j^k| - \frac{\Delta t k}{2\Delta x S} \right) + p_{j+1}^k \frac{\Delta t^2 k}{2\Delta x^2 \rho} + \\ & + p_j^k \left( 1 - \frac{\Delta t^2 k}{\Delta x^2 \rho} \right) + \frac{\Delta t k}{2} (3m_j^k - m_j^{k-1}) \end{aligned} \quad (79)$$

Na obrázku 10 je znázorněn postup numerického řešení: Pro výpočet hodnoty ve vnitřním bodě (označeném písmenem „j“) v následujícím časovém kroku je třeba použít tři body z aktuálního časového kroku.

K výpočtu tlaku a průtoku v novém časovém kroku se využívají rovnice silové rovnováhy a rovnice kontinuity. Čili dvě rovnice k vyřešení dvou neznámých. V krajních bodech však musí být splněna i okrajová podmínka, tím vznikla přeuroččená soustava rovnic. V takovém případě se využije vztah pro okrajovou podmínku (tomu je dále věnována celá kapitola) a k ní se přidá:

bud' **rovnice kontinuity** v diferenciálním tvaru odvozeném z (47).

$$\frac{p_j^{k+1} - p_j^k}{\Delta t} + \frac{k}{S} \frac{Q_{j+1}^{k+1} - Q_j^{k+1}}{\Delta x} = k m_j^k \quad (80)$$

- Pro počáteční okrajovou podmínku (v bodě 1):

$$\frac{p_1^{k+1} - p_1^k}{\Delta t} + \frac{k}{S} \frac{Q_2^{k+1} - Q_1^{k+1}}{\Delta x} = km_1^k \quad (81)$$

- Pro koncovou okrajovou podmínku (v bodě  $N$ ):

$$\frac{p_N^{k+1} - p_N^k}{\Delta t} + \frac{k}{S} \frac{Q_N^{k+1} - Q_{N-1}^{k+1}}{\Delta x} = km_N^k \quad (82)$$

nebo **rovnice silové rovnováhy** v diferenciálním tvaru odvozeném z (54).

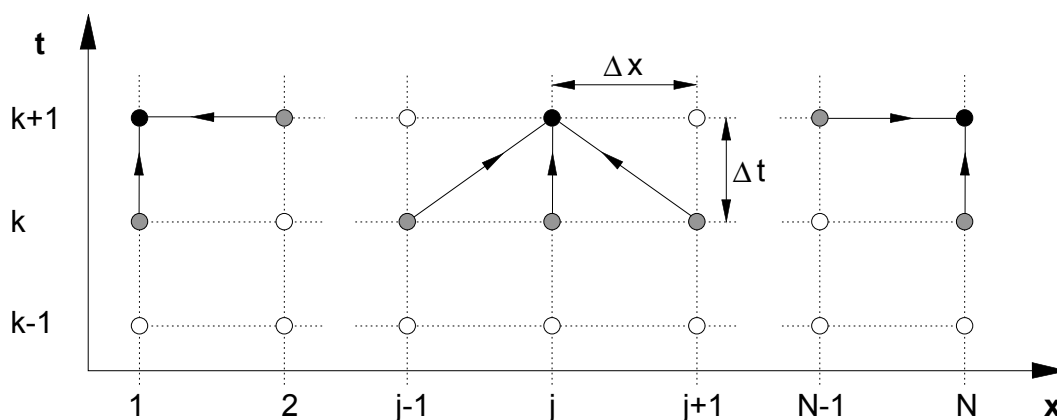
$$\frac{Q_j^{k+1} - Q_j^k}{\Delta t} + \frac{S}{\rho} \frac{p_{j+1}^{k+1} - p_j^{k+1}}{\Delta x} + \frac{\lambda}{2DS} |Q_j^k| Q_j^k = Sg \cos \alpha \quad (83)$$

- Pro počáteční okrajovou podmínku:

$$\frac{Q_1^{k+1} - Q_1^k}{\Delta t} + \frac{S}{\rho} \frac{p_2^{k+1} - p_1^{k+1}}{\Delta x} + \frac{\lambda}{2DS} |Q_1^k| Q_1^k = Sg \cos \alpha \quad (84)$$

- Pro koncovou okrajovou podmínku:

$$\frac{Q_N^{k+1} - Q_N^k}{\Delta t} + \frac{S}{\rho} \frac{p_N^{k+1} - p_{N-1}^{k+1}}{\Delta x} + \frac{\lambda}{2DS} |Q_N^k| Q_N^k = Sg \cos \alpha \quad (85)$$



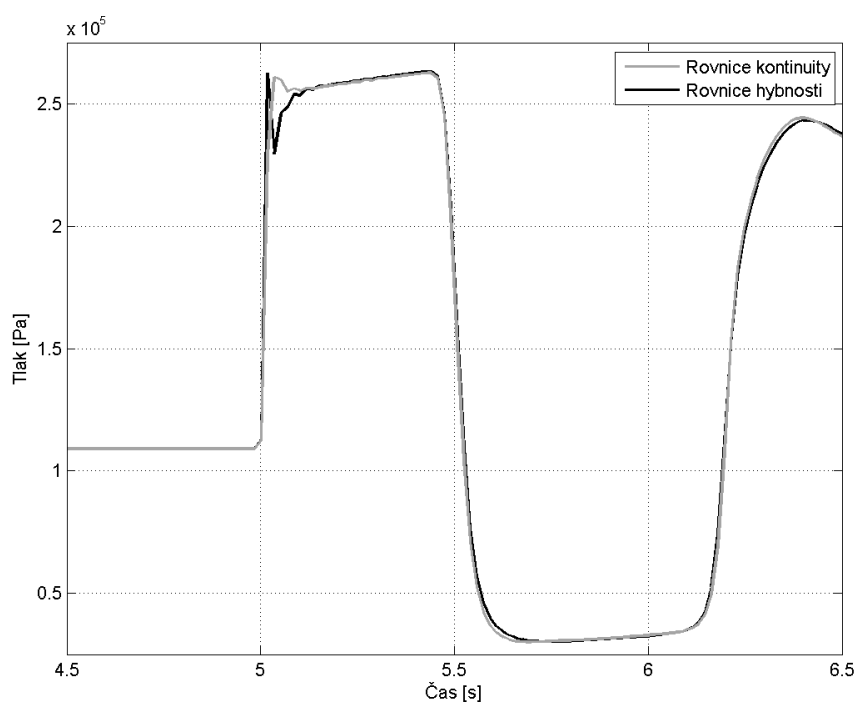
Obrázek 10: Numerické schéma

Nabízí se otázka, jestli se výsledek za použití rovnice kontinuity liší od výsledku za použití rovnice hybnosti. Pokud ano, tak který přístup je lepší? Nejlepší bude vyzkoušet si to na následujícím příkladu.

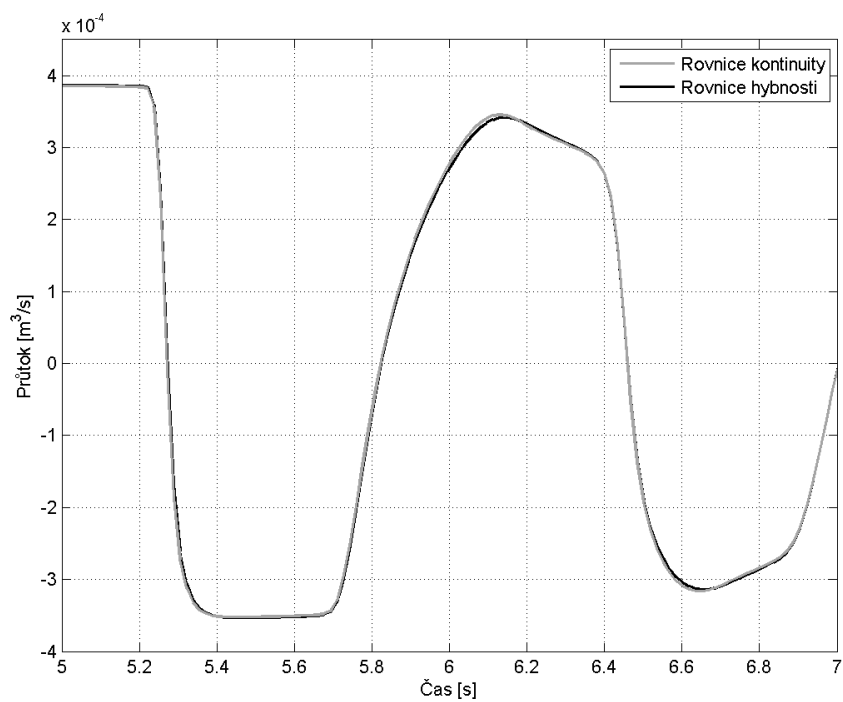
Jednoduché potrubí o délce 58 m, průměru 28 mm má vstupní konec ve výšce 2.25 m. Tlak je v tomto místě konstantní a má hodnotu 100 kPa. Výstupní konec potrubí je ve výšce 0 m a za uzávěrem je opět tlak 100 kPa.

Při rychlém zavření uzávěru, dojde k vodnímu rázu. Jeho průběh na spodním konci potrubí je znázorněn na obr. 11. Na počátku trubky, lze sledovat průtokové pulsace, které jsou zobrazeny na obr. 12.

Z grafů je patrné, že oba přístupy dávají srovnatelné výsledky, takže pravděpodobně nezáleží na tom, která rovnice bude využita pro výpočet okrajových bodů potrubí.



Obrázek 11: Provnání výpočtu pomocí rovnice kontinuity a hybnosti na výstupu z potrubí



Obrázek 12: Provnání výpočtu pomocí rovnice kontinuity a hybnosti na vstupu do potrubí

## 4.1 Stabilita numerické metody

Pro zajištění konvergence a stability řešení je nezbytné splnit *podmínku stability* pro metodu *Lax-Wendroff* [14].

$$\Delta t \leq \left| \frac{\Delta x}{v_0} \right| \quad (86)$$

Rychlost zvuku se získá ze vztahu:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (87)$$

Když se výraz (87) dosadí do (86) s využitím (46), kde byl definován modul pružnosti  $k$ , může být podmínka stability napsána ve tvaru:

$$\Delta t \leq \Delta x \sqrt{\frac{1}{v_0^2} + \frac{D\rho}{E\Delta} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{b}\Delta t\right) \right]} \quad (88)$$

Jedná se o implicitní vztah a ke stanovení maximálního přípustného časového kroku je nezbytné využít iterační postup.

## 4.2 Paměťová funkce

V rovnici kontinuity (46) byla zavedena proměnná  $m$ , která zastupuje vliv pružné stěny potrubí.

$$m = -\frac{D}{b\Delta} \left[ \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-\tau)}{d\tau} \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau + p(0) \exp\left(-\frac{E}{b}t\right) \right] \quad (89)$$

Ve funkci se integrují tlakové změny přes celou časovou doménu, takže je nutné znát tlakovou historii. Odtud plyne název *paměťová funkce*. Za předpokladu, že směrnice tlakové změny je v průběhu jednoho časového kroku konstantní, může být integrál nahrazen sumou integrálů, které jsou však řešitelné.

$$m = -\frac{D}{b\Delta} \left[ \sum_{i=0}^K \frac{p_j^{k-i} - p_j^{k-i-1}}{\Delta t} \int_{(i+1)\Delta t}^{(i+2)\Delta t} \exp\left(-\frac{E}{b}\tau\right) d\tau + p_j^0 \exp\left(-\frac{E}{b}t_K\right) \right] \quad (90)$$

Po provedení integrace má *paměťová funkce* tvar:

$$m = -\frac{D}{E\Delta} \sum_{i=0}^K \frac{p_j^{k-i} - p_j^{k-i-1}}{\Delta t} \left\{ \exp\left[-\frac{E}{b}(i+1)\Delta t\right] - \exp\left[-\frac{E}{b}(i+2)\Delta t\right] \right\} - \frac{D}{b\Delta} p_j^0 \exp\left(-\frac{E}{b}t_K\right) \quad (91)$$

Sumace ve vztahu (91) je z hlediska doby výpočtu značně náročná, protože může obsahovat desetitisíce čítanců v každém řešeném uzlu. Tímto problémem se zabýval Panko [16] a došel k závěru, že není nezbytně nutné provádět sumaci všech časových kroků. Konkrétně, pokud se řeší doba 13 s, stačí uvažovat tlakové změny za posledních 0,19 s, aby byla chyba 10 %. Pokud by se tyto změny sčítaly z období za posledních 0,76 s, činí chyba pouhé 0,01 %.

Pro určení počtu časových kroků, které musí být uváženy při výpočtu hodnoty *paměťové funkce*, se zavede funkce  $f_p$ .

$$f_p = \frac{\sum_{i=0}^s \left\{ \exp\left[-\frac{E}{b}(i+1)\Delta t\right] - \exp\left[-\frac{E}{b}(i+2)\Delta t\right] \right\}}{\sum_{i=0}^K \left\{ \exp\left[-\frac{E}{b}(i+1)\Delta t\right] - \exp\left[-\frac{E}{b}(i+2)\Delta t\right] \right\}} \quad (92)$$

Ve jmenovateli je součet exponenciální hodnoty ve složené závorce od 0 do  $K$ , kde  $K$  je počet všech časových kroků výpočtu. V čitateli je stejný výraz, jen je sčítán od 0 do  $s$ , kde  $s < K$ . Pokud je  $s = K$ , tak hodnota  $f_p = 1$ , jinak  $f_p \in (0; 1)$ . Úkolem je najít hodnotu  $s$  takovou, aby  $f_p \approx 1$ . Nejprve se provede sumace ve výrazu (92), tím vznikne:

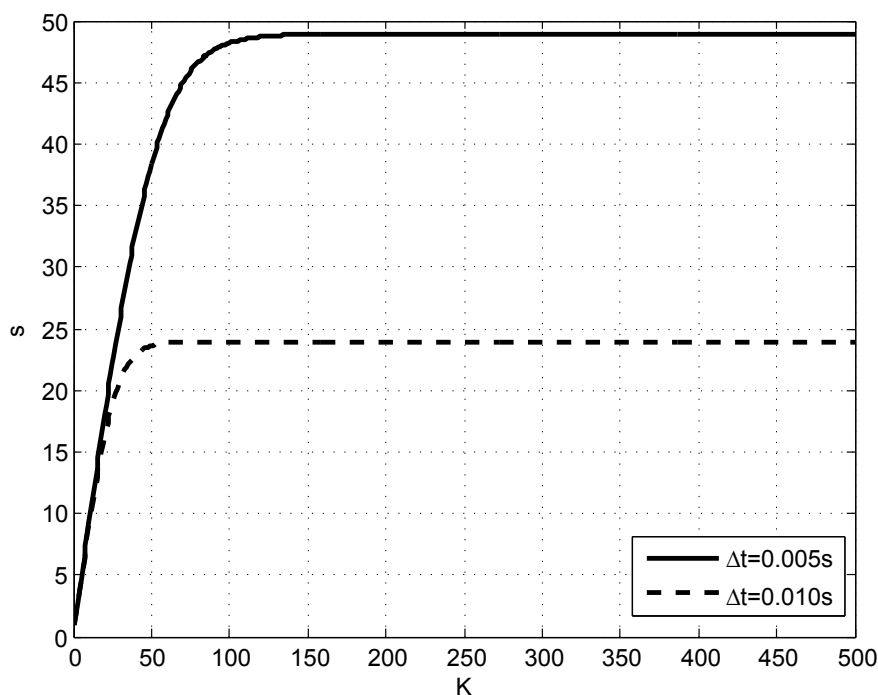
$$f_p = \frac{\exp\left(-\frac{E}{b}\Delta t\right) \left\{1 - \exp\left[-\frac{E}{b}(s+1)\Delta t\right]\right\}}{\exp\left(-\frac{E}{b}\Delta t\right) \left\{1 - \exp\left[-\frac{E}{b}(K+1)\Delta t\right]\right\}} \quad (93)$$

Po několika úpravách se obdrží vztah:

$$s = -\frac{b}{E \cdot \Delta t} \ln \left\{1 - f_p + f_p \exp\left[-\frac{E}{b}(K+1)\Delta t\right]\right\} - 1 \quad (94)$$

Pro úplné pochopení výrazu (94) malý příklad:

Nechť je modul pružnosti  $E = 6 \cdot 10^{10}$  Pa, tlumení  $b = 5 \cdot 10^9$  Pa·s a je požadavek na splnění rovnice kontinuity z 95 %, to znamená, že  $f_p = 0,95$ . Velikost časového kroku bude  $\Delta t = 0,01$  s. Po dosazení těchto hodnot do (94), vznikne závislost  $s(K)$ , která může být graficky znázorněna.



Obrázek 13: Potřebný počet členů v sumaci pro výpočet paměťové funkce

Z obrázku 13 je patrné, že pro určení hodnoty *paměťové funkce* s přesností 95 % stačí zahrnout tlaky z posledních 24 kroků pro libovolně dlouhý výpočet. Pro poloviční časový krok je třeba do výpočtu *paměťové funkce* zahrnout posledních 48 kroků. To je nesmírně důležitý závěr, protože zkracuje výpočetní čas. Samozřejmě tím vzniká určitá nepřesnost, ale pokud  $f_p \geq 0,9$ , tak je zanedbatelná.

### 4.3 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky vyplývají z konkrétních hydraulických elementů, které jsou umístěny v řešeném systému. Mohou to být přímo předepsané hodnoty tlaku (např.

pro rozlehlou nádrž je tlak konstantní) nebo průtoku, popřípadě nějaký vzorec popisující vyrovnávací nádrž, čerpadlo a jiné složitější okrajové podmínky. V této podkapitole budou postupně popsány nejběžnější hydraulické prvky. Aby výpočet mohl fungovat musí být definované pro každý okamžik výpočtu.

Protože se jedná o okrajové podmínky, tak veličiny označené dolním indexem 1 nebo 2 se týkají prvního případně druhého bodu tzn. počátku potrubí (výstupní trubky). Veličiny označené indexem  $N$  nebo  $N - 1$  se týkají posledních dvou bodů na konci trubky a tedy potrubí před daným hydraulickým prvkem (okrajovou podmínkou).

#### 4.3.1 Průtoková podmínka

Společně s tlakovou okrajovou podmínkou je nejjednodušší. Znamená to, že se předepíše průtok pro každý časový okamžik a dosadí se do některé z rovnic (81), (82), (84) nebo (85). Tato podmínka není moc přirozená a v některých případech může způsobovat nestandardní chování výpočtu a někdy i jeho kolaps.

#### 4.3.2 Tlaková podmínka

Je obdobný případ jak průtoková okrajová podmínka. Známé hodnoty tlaků se dosadí do některé z rovnic (81), (82), (84) nebo (85) a vypočítají se průtoky. Volba tlakové podmínky sebou nenese žádná rizika a může se používat bez omezení. S její pomocí lze nahradit rozlehlou nádrž nebo výtok do volného prostoru.

#### 4.3.3 Odpor

Odpor je první složitější podmínka. Může nahrazovat téměř cokoliv: kolena, ventily, náhlé i pozvolné změny průměru a další místní ztráty. Základní vzorec pro výpočet místních ztrát je definován pomocí odporu  $R$  nebo ztrátového součinitele  $\xi$ .

$$\frac{\Delta p}{\rho} = R \cdot Q \cdot |Q| \quad (95)$$

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \xi \frac{8}{\pi^2 D^4} \cdot Q \cdot |Q| \quad (96)$$

Zde se vyskytuje první problém. Součinitel místních ztrát  $\xi$  se limitně blíží k nekonečnu pro uzavřený ventil. Z toho důvodu byl zaveden *průtokový součinitel*  $K_v$ , který lze chápat jako inverzní ke  $\xi$ . Jeho hodnota je definována, jako průtok kapaliny o hustotě  $1000 \text{ kg/m}^3$  při tlakovém spádu  $100 \text{ kPa}$ .

$$\frac{\Delta p_{ref}}{\rho_{ref}} = R \cdot K_v^2 \quad (97)$$

Odtud lze vyjádřit hodnotu odporu  $R$  a dosadit do (95). Z toho vyplyne vztah pro *průtokový součinitel*, který často bývá uváděn v jednotkách  $\text{m}^3/\text{h}$ .

$$K_v = Q \sqrt{\frac{\Delta p_{ref}}{\rho_{ref}} \cdot \frac{\rho}{\Delta p}} \quad (98)$$

Hodnota  $K_v$  je rovna 0 pro uzavřený ventil a blíží se k nekonečnu, pokud jsou ztráty nulové. Samozřejmě, lze lehce odvodit i vztah mezi  $K_v$  a  $\xi$  z (96) a (98).

$$K_v = \sqrt{\frac{\Delta p_{ref}}{\rho_{ref}} \cdot \frac{\pi^2 D^4}{8\xi}} \quad (99)$$

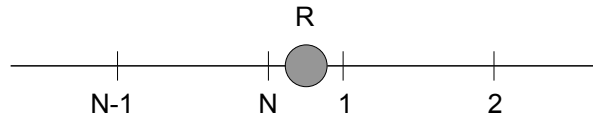
$$\xi = \frac{\pi^2 D^4}{8K_v^2} \cdot \frac{\Delta p_{ref}}{\rho_{ref}} \quad (100)$$



Nyní k druhému problému. V rovnici (96) se vyskytuje průměr potrubí  $D$ . Naskytá se otázka, který průměr by se měl při výpočtu volit: vstupní (před prvkem) nebo výstupní (za prvkem)?

Hodnota  $\xi$  je ryze experimentální charakteristika, která se zjišťuje měřením tlakového spádu na prvku. Nelze ji tedy matematicky odvodit a záleží na tom, k jaké rychlosti (průměru) je při měření vztažena. Ruský vědec I.E. Idělčik [13] uvažoval jako vztažnou hodnotu vždy tu rychlost, která byla vyšší. Takže, když měřil ztráty konfuzoru, počítal velikost  $\xi$  pomocí výstupní rychlosti, když měřil ztráty difuzoru, tak za vztažnou rychlost volil tu vstupní.

A nyní k vlastnímu řešení odporu mezi dvěma trubkami. Na obrázku 14 je znázorněno zapojení odporu, kde vstupní trubka je vlevo a má neznámé hodnoty průtoku  $Q_N^{k+1}$  a tlaku  $p_N^{k+1}$ . Výstupní trubka má neznámé hodnoty  $Q_1^{k+1}$  a  $p_1^{k+1}$ . Samotný odpor je zakreslen jako kroužek a označen písmenem  $R$ .



Obrázek 14: Schéma zapojení odporu

Protože vstupní a výstupní průtok musejí být stejné, tak platí  $Q_N^{k+1} = Q_1^{k+1} = Q^{k+1}$ . Po dosazení do (95) s respektováním směru proudění vznikne:

$$p_1^{k+1} - p_N^{k+1} = \rho R |Q^{k+1}| Q^{k+1} \quad (101)$$

Po dosazení za tlaky z rovnice kontinuity (81) a (82) se získá kvadratická rovnice s absolutní hodnotou, kde jedinou neznámou bude průtok  $Q^{k+1}$ :

$$0 = |Q^{k+1}| Q^{k+1} + C_1 Q^{k+1} + C_2 \quad (102)$$

$$C_1 = \frac{\Delta t}{\rho R} \left( \frac{k_N}{\Delta x_N S_N} + \frac{k_1}{\Delta x_1 S_1} \right) \quad (103)$$

$$C_2 = \frac{1}{\rho R} \left[ p_1^k - p_N^k + \Delta t \left( k_1 m_1^k - k_N m_N^k - \frac{k_N Q_{N-1}^{k+1}}{\Delta x_N S_N} - \frac{k_1 Q_2^{k+1}}{\Delta x_1 S_1} \right) \right] \quad (104)$$

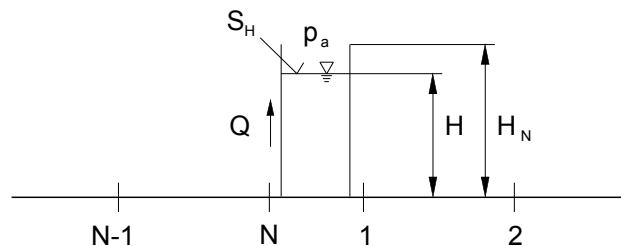
Nebo lze do (101) dosadit za tlaky z rovnice hybnosti (84) a (85). Potom koeficienty kvadratické rovnice s absolutní hodnotou mají tvar:

$$C_1 = \frac{2 \left( \frac{\Delta x_N}{S_N} + \frac{\Delta x_1}{S_1} \right)}{\Delta t \left[ \frac{\Delta x_1 \lambda_1}{D_1 S_1^2} + \frac{\Delta x_N \lambda_N}{D_N S_N^2} + 2R \right]} \quad (105)$$

$$C_2 = \frac{\frac{p_2^{k+1} - p_{N-1}^{k+1}}{\rho} - \frac{Q^k}{\Delta t} \left( \frac{\Delta x_N}{S_N} + \frac{\Delta x_1}{S_1} \right) - \Delta x_N g \cos \alpha_N - \Delta x_1 g \cos \alpha_1}{\left( \frac{\Delta x_1 \lambda_1}{D_1 S_1^2} + \frac{\Delta x_N \lambda_N}{D_N S_N^2} \right) \frac{1}{2} + R} \quad (106)$$

V obou případech je koeficient  $C_1 > 0$ . Z toho plyne jednoznačné řešení rovnice (102). V případě nulového odporu výpočet pomocí rovnice kontinuity nelze provést. To je však pouze malé omezení a nemá praktický význam.

Pokud je odpor umístěn na konci potrubí, tak se přímo definuje hodnota tlaku  $p_1$  nebo  $p_N$  a odvození probíhá podle stejného schématu.



Obrázek 15: Schéma vyrovnávací nádrže

#### 4.3.4 Vyrovnávací nádrž

Vyrovnávací nádrž je dána plochou volné hladiny, tlakem nad hladinou případně svojí výškou. Schéma je na obr. 15. Předpokládá se, že tlak u dna nádrže je stejný na vstupu i na výstupu, takže lze psát  $p_N^{k+1} = p_1^{k+1} = p^{k+1}$ .

Chování vyrovnávací nádrže je potom popsáno následujícími rovnicemi:

$$Q_N = Q + Q_1 \quad (107)$$

$$p = H\rho g + p_a \quad (108)$$

$$Q = \frac{dH}{dt} S_H \quad (109)$$

Z rovnice (108) se vyjádří aktuální výška hladiny a dosadí se do (109), s využitím (107) se po několika úpravách obdrží výraz:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (Q_N - Q_1) \frac{\rho g}{S_H} dt = \int_{p^k}^{p^{k+1}} dp \quad (110)$$

Za předpokladu, že v jednom časovém kroku  $\Delta t$  jsou průtoky konstantní má formule pro výpočet tlaku u dna nádrže tvar:

$$p^{k+1} = p^k + (Q_N^{k+1} - Q_1^{k+1}) \frac{\Delta t \rho g}{S_H} \quad (111)$$

Průtoky jsou stále neznámé, ale opět se zde využijí buď rovnice kontinuity (81) a (82) nebo rovnice hybnosti (84) a (85). Pokud bude nádrž umístěna na začátku resp. na konci potrubí, tak se příslušný průtok bude rovnat nule.

V tomto postupu není zahrnuta setrvačnost samotné nádrže, takže v některých případech může být vhodnější počítat část nádrže jako trubku.

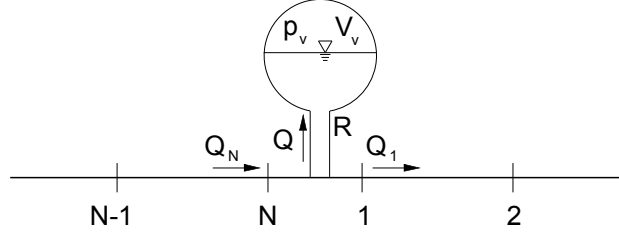
Pokud se stane, že během výpočtu bude tlak vyšší než tlak odpovídající úplně plné nádrži (dojde k přetečení), tak:

$$p^{k+1} = \rho g H_N \quad (112)$$

#### 4.3.5 Plynový akumulátor

Plynový akumulátor je dán objemem a tlakem plynu nad hladinou. Schéma je znázorněno na obr. 16. Postup řešení bude podobný postupu u vyrovnávací nádrže. Opět lze psát  $p_N = p_1 = p$  a výška akumulátoru se zanedbává. V tomto případě se však zanedbává vtokový odpor, který je dán hodnotou  $R$ . Tlak plynu v akumulátoru odpovídá následující rovnici.

$$p_v = p - \rho R |Q| Q \quad (113)$$



Obrázek 16: Schéma plynového akumulátoru

Zároveň musí platit stavová rovnice, kterou lze derivovat podle času a vyjádřit z ní průtok do akumulátoru, jehož kapacita  $C = \frac{V_v}{p_v}$ .

$$p_v V_v^n = \text{konst} \quad (114)$$

$$\frac{dp_v}{dt} V_v^n + n V_v^{n-1} \frac{dV_v}{dt} p_v = 0 \quad (115)$$

$$\frac{dp_v}{dt} V_v^n - n V_v^{n-1} Q p_v = 0 \quad (116)$$

$$\frac{C}{n} \cdot \frac{dp_v}{dt} = Q \quad (117)$$

Poslední rovnici je nezbytné integrovat:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} Q dt = \int_{p_v^k}^{p_v^{k+1}} \frac{C}{n} dp \quad (118)$$

Řešení soustavy (119) (120) a (121), které vychází z (107) (113) a (118), vede na (122). Zároveň je za průtoky  $Q_N^{k+1}$  a  $Q_1^{k+1}$  dosazeno z (81) a (82) nebo (84) a (85).

$$Q^{k+1} = Q_N^{k+1} - Q_1^{k+1} \quad (119)$$

$$p_v^{k+1} = p^{k+1} - \rho R |Q^{k+1}| Q^{k+1} \quad (120)$$

$$(Q_N^{k+1} - Q_1^{k+1}) = \frac{C^k}{n \Delta t} (p_v^{k+1} - p_v^k) \quad (121)$$

$$0 = |Q^{k+1}| Q^{k+1} + \frac{Q^{k+1}}{\rho R} \left( \frac{n \Delta t}{C^k} - \frac{1}{K_1} \right) + \frac{1}{\rho R} \left( p_v^k - p^k + \frac{K_2}{K_1} \right) \quad (122)$$

Rovnice (121) má smysl za předpokladu, že je kapacita v jednom časovém kroku konstantní. V této chvíli je neznámý průtok do akumulátoru  $Q^{k+1}$ , tlak plynu  $p_v^k$  a kapacita  $C^k$  z předchozího časového kroku, který se během výpočtu neukládá. Tlak se stanoví jednoduše z *Bernoulliho rovnice*:

$$p_v^k = p^k - R |Q_N^k - Q_1^k| (Q_N^k - Q_1^k) \quad (123)$$

Kapacita je poměr objemu a tlaku, kde objem se vyjádří pomocí klidových hodnot ze stavové rovnice pro polytropický děj.

$$V^k = \left( \frac{p_{v0}}{p_v^k} \right)^n \cdot V_0 \quad (124)$$

$$C^k = \frac{V_v^k}{p_v^k} \quad (125)$$

Po dosazení (123) a (125) do (122) vznikne kvadratická rovnice s absolutní hodnotou, která je po formální stránce stejná jak (102) a proto se může i stejným způsobem řešit. Poté už není problém dosadit do vztahu pro výpočet tlaku v uzlu s plynovým akumulátorem. Pokud se bude vycházet z okrajových podmínek podle rovnice kontinuity, tak:

$$p^{k+1} = p_N^{k+1} = p_1^{k+1} = p^k + \frac{Q^{k+1} - K_2}{K_1} \quad (126)$$

$$K_1 = -\frac{\Delta x_N S_N}{\Delta t \cdot k_N} - \frac{\Delta x_1 S_1}{\Delta t \cdot k_1} \quad (127)$$

$$K_2 = Q_{N-1}^{k+1} - Q_2^{k+1} + \Delta x_N S_N m_N^k + \Delta x_1 S_1 m_1^k \quad (128)$$

Průtoky  $Q_N^{k+1}$  a  $Q_1^{k+1}$  se pak získají prostým dosazením do (81) a (82). V případě, že odpor větve  $R = 0$  je vztah pro tlak ve tvaru (129) a není třeba řešit (122), protože  $p_v = p$ .

$$p^{k+1} = p^k + \frac{K_2}{\frac{C^k}{n\Delta t} - K_1} \quad (129)$$

Pokud se bude vycházet z okrajových podmínek podle rovnice hybnosti (84) a (85), má kvadratická rovnice následující tvar:

$$0 = |Q^{k+1}| Q^{k+1} + \frac{Q^{k+1}}{\rho R} \left( \frac{n\Delta t}{C^k} - \frac{1}{K_1} \right) + \frac{1}{\rho R} \left( p_v^k + \frac{K_2}{K_1} \right) \quad (130)$$

Poté se tlak v uzlu získá z:

$$p^{k+1} = \frac{Q^{k+1} - K_2}{K_1} \quad (131)$$

$$K_1 = -\Delta t \left( \frac{S_1}{\Delta x_1 \rho} + \frac{S_N}{\Delta x_N \rho} \right) \quad (132)$$

$$K_2 = Q_N^k - Q_1^k + \Delta t \left[ \begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{2D_1 S_1} |Q_1^k| Q_1^k - \frac{\lambda_N}{2D_N S_N} |Q_N^k| Q_N^k + \\ & + S_N g \cos \alpha_N - S_1 g \cos \alpha_1 + \\ & + \frac{S_N}{\Delta x_N \rho} p_{N-1}^{k+1} + \frac{S_1}{\Delta x_1 \rho} p_2^{k+1} \end{aligned} \right] \quad (133)$$

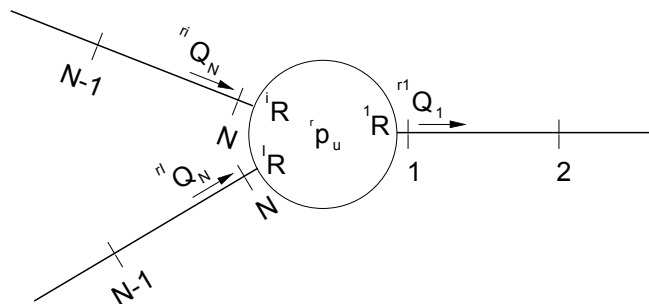
V případě nulového odporu  $R$ :

$$p^{k+1} = \frac{p^k + K_2 \frac{n\Delta t}{C^k}}{1 - K_1 \frac{n\Delta t}{C^k}} \quad (134)$$

#### 4.3.6 Spoj více trubek

Hydraulické sítě se málokdy skládají z jednoduchého potrubí. Mnohem častěji se jedná o rozvětvenou síť. V takovém případě se jednotlivé trubky sbíhají do spoju a ty je třeba ošetřit speciální okrajovou podmínkou, která je bohužel složitější než všechny předchozí. Spoj může být znázorněn podle obr. 17. Na vstupu či výstupu jednotlivých větví mohou být umístěny odpory.

Ve spoji je tlak  ${}^r p_u$ , který je předpokládán stejný pro všechny trubky, které se v něm sbíhají. Vlastní spoj je identifikován pomocí svého čísla ( $r$ ) a trubky, které ho tvoří pak mají označeny průtoky  ${}^{ri} Q$ , kde  $i$  se mění od 1 až do počtu trubek v uzlu  $I$ . Podle toho jestli se jedná o začátek nebo konec trubky, mají průtoky přiřazeny index 1 nebo  $N$ .



Obrázek 17: Schéma potrubních spojů

Vlastní výpočet potom znamená vyřešit soustavu rovnic, která vznikne z okrajových podmínek pro jednotlivé větve a rovnice kontinuity pro vlastní spoj  $\sum Q = 0$ . Neznámé jsou průtoky  $r^1 Q$  až  $r^I Q$  a tlak  $r p_u$ . Tomu odpovídá  $I + 1$  rovnic a soustava je snadno řešitelná, pokud jsou všechny odpory  ${}^i R = 0$ . V takovém případě se tlaky na koncích potrubí rovnají tlaku  $r p_u$ .

Pokud jsou odpory nenulové přibývají neznámé tlaky  $r^i p$  a soustava se zvětší o rovnice:

$$r p_u = r^i p_{index} \pm {}^i R |r^i Q_{index}|^{r^i} Q_{index} \quad (135)$$

Když se jedná o výstupní trubku, bude *index* roven 1 a znaménko bude kladné, když se jedná o vstupní trubku, bude *index* roven  $N$  a v rovnici bude znaménko mínus. Výsledná soustava rovnic je tentokrát nelineární a má dvojnásobnou velikost ( $2 \cdot I + 1$  rovnic). K jejímu řešení je nezbytné využít některou z iteračních metod. Podle [15] je výhodné použít Newtonovu iterační metodu, protože velmi rychle konverguje.

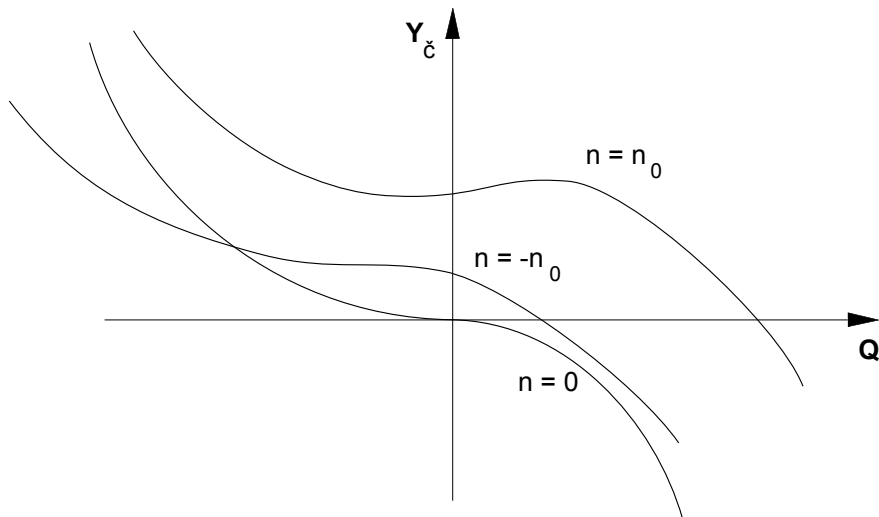
### 4.3.7 Čerpadlo

Čerpadlo je prvek, který nelze popsat jedním či dvěma koeficienty. Jedná se o značně složitou funkci, která je navíc pro každé čerpadlo odlišná. Záleží na jeho konstrukci a otáčkách, při kterých je provozováno. Velmi často stačí znát průběh měrné energie v závislosti na průtoku pouze v čerpadlovém režimu pro konstantní otáčky. Nicméně existuje celá řada nestandardních stavů, které v praxi skutečně mohou nastat. Jen pro představu: provoz v turbínovém režimu, rozběh čerpadla, výpadek ze sítě, změna otáček,...

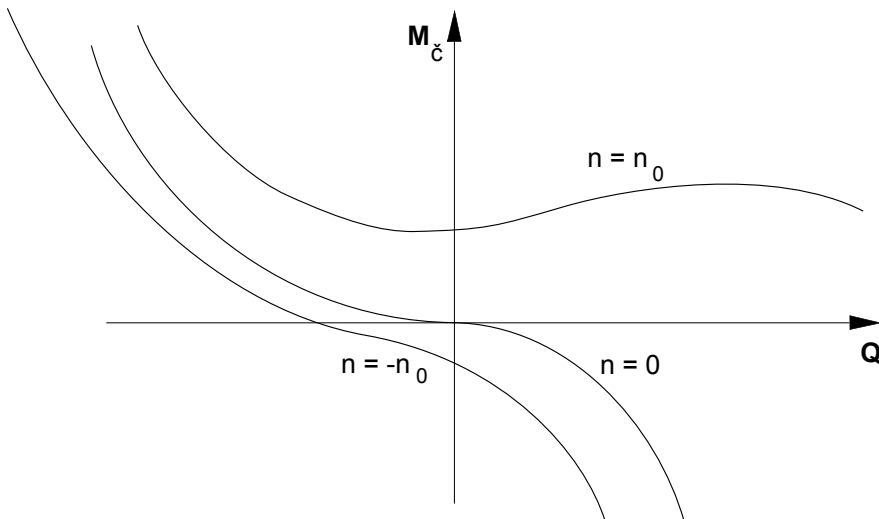
Pro inspiraci je dobré nahlédnout např. do [24]. K plnému popisu je třeba zadat sedm funkcí. Tři pro závislost měrné energie, kterou čerpadlo dodává do systému, tři pro moment čerpadla a jedna pro momentovou charakteristiku motoru. Na obr. 18 je příklad závislosti pro kladné otáčky čerpadla  $n_0$ , záporné otáčky a nulové otáčky. Podobně, na obr. 19 jsou závislosti momentu čerpadla na průtoku a konečně na obr. 20 je zobrazena momentová charakteristika motoru.

Charakteristiky čerpadla jsou známy pro konkrétní otáčky  $n_0$ . Jejich přepočtení na požadované otáčky  $n$  lze provést podle následujících formulí.

$$\begin{aligned} Y_c(Q, n) &= \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 Y_c\left(Q \frac{n_0}{|n|}, n_0\right) & ; n > 0 \\ Y_c(Q, n) &= \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 Y_c\left(Q \frac{n_0}{|n|}, -n_0\right) & ; n < 0 \\ Y_c(Q, 0) &= K_{Y+} Q^2 & ; n = 0 \wedge Q \geq 0 \\ Y_c(Q, 0) &= K_{Y-} Q^2 & ; n = 0 \wedge Q < 0 \end{aligned} \quad (136)$$



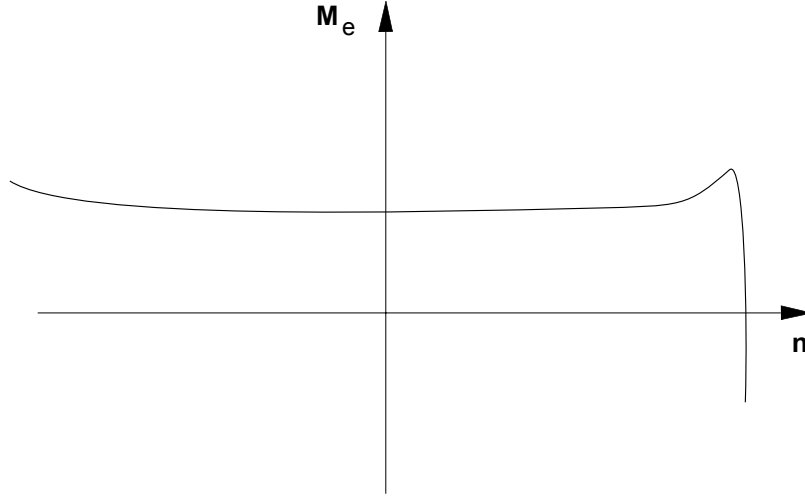
Obrázek 18: Závislost měrné energie čerpadla na průtoku [24]



Obrázek 19: Závislost kroutícího momentu čerpadla na průtoku [24]

Stejným způsobem je možné přistoupit i k momentu čerpadla.

$$\begin{aligned}
 M_{\check{c}}(Q, n) &= \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 M_{\check{c}}\left(Q \frac{n_0}{|n|}, n_0\right) & ; n > 0 \\
 M_{\check{c}}(Q, n) &= \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 M_{\check{c}}\left(Q \frac{n_0}{|n|}, -n_0\right) & ; n < 0 \\
 M_{\check{c}}(Q, 0) &= K_{M+} Q^2 & ; n = 0 \wedge Q \geq 0 \\
 M_{\check{c}}(Q, 0) &= K_{M-} Q^2 & ; n = 0 \wedge Q < 0
 \end{aligned} \tag{137}$$



Obrázek 20: Momentová charakteristika asynchronního motoru [24]

Nyní k vlastnímu řešení. V případě proměnných otáček elektromotoru (a tedy i čerpadla), platí rovnice dynamické rovnováhy:

$$M_E - M_{\varepsilon} = 2\pi J \frac{dn}{dt} \quad (138)$$

Ve speciálním případě, kdy se uvažuje moment setrvačnosti  $J = 0$ , je tato rovnice nahrazena vztahem  $M_{\varepsilon} = M_E$ . Po převedení (138) na difference a drobné úpravě lze psát vztah pro otáčky v novém časovém kroku. Samozřejmě je nezbytné definovat počáteční otáčky.

$$n^{k+1} = n^k + \frac{\Delta t}{2\pi J} (M_E - M_{\varepsilon}) \quad (139)$$

Moment elektromotoru je popsán funkcí  $M_E(n^k)$  a za moment čerpadla se dosadí z (137)  $M_{\varepsilon}(Q^k, n^k)$ . Takto získané otáčky  $n^{k+1}$  lze bez problémů dosadit do (136). Společně s energetickou rovnicí vznikne soustava dvou rovnic.

$$Y_{\varepsilon} = Y_{\varepsilon}(Q^{k+1}, n^{k+1}) \quad (140)$$

$$\rho Y_{\varepsilon} = p_1^{k+1} - p_N^{k+1} + \frac{8\rho (Q^{k+1})^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_N^4} \right) \quad (141)$$

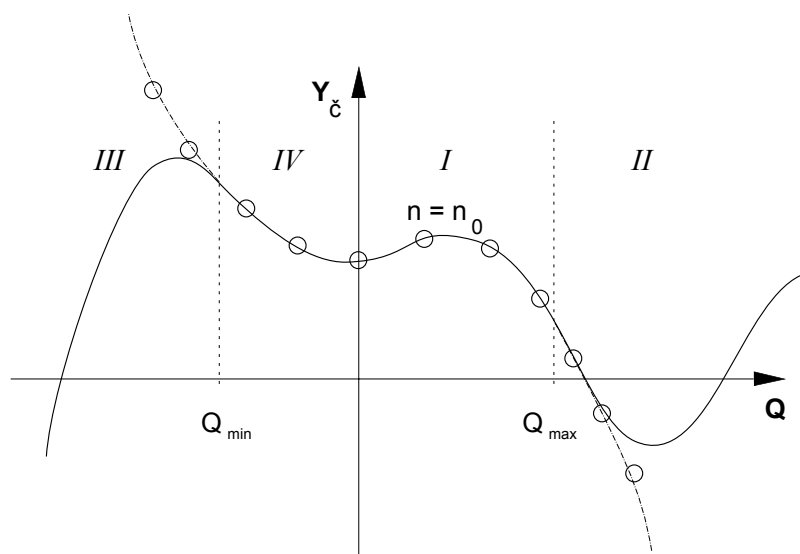
Po dosazení za tlaky  $p_N^{k+1}$  a  $p_1^{k+1}$  z (81) a (82) příp. (84) a (85) a následné úpravě vznikne z (140) a (141) jedna rovnice s jedinou neznámou  $Q^{k+1}$ . Jejím vyřešením a následným dosazením do okrajových podmínek (81) a (82) příp. (84) a (85) je daný časový krok spočítaný a může se přistoupit k dalšímu.

#### 4.3.8 Nahrazení charakteristik čerpadla

V předchozí části bylo podrobně popsáno řešení okrajové podmínky s čerpadlem. Nicméně nebylo konkrétně řečeno, jak vlastně vypadají funkce momentu čerpadla (obr. 19), měrné energie (obr. 18) a momentu motoru (obr. 20). Obrázky jsou dobré pro získání představ, ale pro numerické řešení moc vhodné nejsou. Proto je nezbytné přistoupit k jejich nahrazení pomocí vhodného polynomu<sup>2</sup>, jak je znázorněno na obr. 21.

Skutečná funkce měrné energie čerpadla je znázorněna body získanými z měření v laboratoři. Tyto body jsou proloženy polynommickou funkcí vyššího řádu. Je zřejmé,

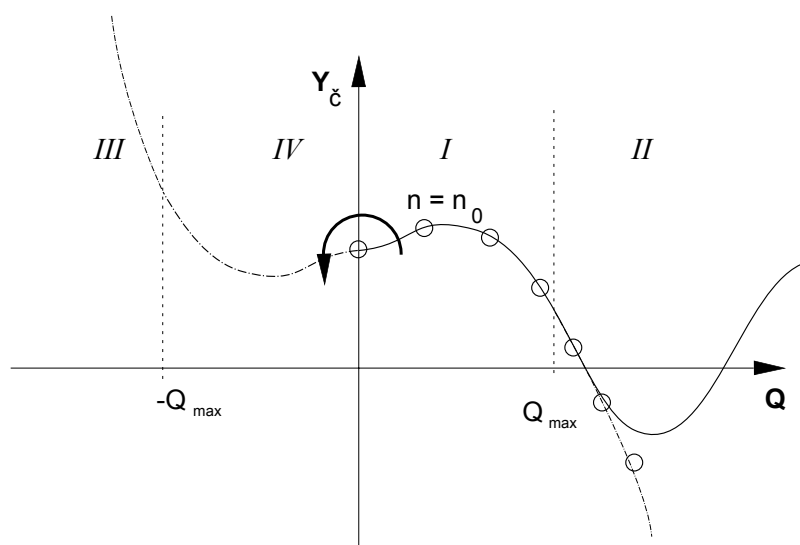
<sup>2</sup>Také je možné použít jinou náhradu např. spline, Bezierovu křivku,...



Obrázek 21: Proložení charakteristiky čerpadla

že polynom bude mít smysl jen v určité oblasti (v tomto případě mezi průtoky  $Q_{min}$  a  $Q_{max}$ ), proto v oblasti II resp. III je funkce měrné energie nahrazena parabolou, která je tečnou k polynomu pro průtok  $Q_{max}$  resp.  $Q_{min}$  a jejíž druhá derivace je rovna odporu stojícího kola při kladném resp. záporném průtoku, tím se zajistí, že výpočet bude dávat „smysluplné“ výsledky pro všechny oblasti proudění.

Takový postup se, samozřejmě, musí provést pro všechny funkce měrné energie i momentu čerpadla. Ne vždy je však k dispozici úplná charakteristika čerpadla. Stává se, že měření bylo provedeno pouze pro čerpadlový režim. V tomto případě lze proložit funkci pouze v oblastech I a II a výsledný průběh otočit o  $180^\circ$  kolem závěrného bodu, jak je znázorněno na obr. 22. Tento postup s velkou pravděpodobností nebude přesný pro záporné průtoky, ale zajistí stabilitu výpočtu.



Obrázek 22: Proložení neúplné charakteristiky čerpadla

Během výpočtu se pak musí kontrolovat, ve které oblasti se nachází výsledek a podle toho používat funkci z dané oblasti (I až IV).

Jiný přístup se volí v případě momentové charakteristiky elektromotoru. Vzhledem k její jednoduchosti ji lze popsat pomocí několika bodů a hodnotu momentu získat z jejich lineární interpolace.



### 4.3.9 Turbína

Turbína je v podstatě čerpadlo, na které je nahlíženo odlišným způsobem. V první řadě se její charakteristiky vykrešlují v grafech  $n_{11} - Q_{11}$  a  $n_{11} - M_{11}$ . Dále se charakteristika stroje může měnit, protože lopatky rozvaděče případně i oběžného kola bývají natáčivé. To celé řešení komplikuje a postup je naznačen níže.

Nejprve je nezbytné provést přepočet jednotkových veličin na měrnou energii a moment pro konstantní otáčky  $n_0$ , které je možné zvolit zcela libovolně. Vychází se z následujících rovnic, u kterých je důležité dávat pozor na jednotky, tak aby výsledná měrná energie, průtok a moment byly v souladu s SI. V praxi se často používají např.  $ot./min$  nebo  $m^3/hod$ , pokud se jedná o anglosaskou zemi, tak se může objevit  $gal/h$ , a aby to bylo ještě složitější, tak galon v USA není stejný jako galon ve Velké Británii...

$$n_{11} = \frac{n_0 D_o}{\sqrt{H}} \quad (142)$$

$$Q_{11} = \frac{Q}{D_o^2 \sqrt{H}} \quad (143)$$

$$M_{11} = \frac{M}{D_o^3 H} \quad (144)$$

$$Y_t = H \cdot g \quad (145)$$

Uvedený přepočet se provádí u změřených dat pro různá otevření rozvaděče  $a_0$  a oběžného kola  $\beta$ . Získaná data se pak proloží pomocí polynomicke plochy, která je funkcí  $a_0$ ,  $\beta$  a  $Q$ . Rovnice měrné energie pak může být zapsána v následujícím tvaru:

$$Y_t = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^s a_0^{m-i} \cdot \beta^{n-j} \cdot Q^{s-k} \cdot A_{ijk} \quad (146)$$

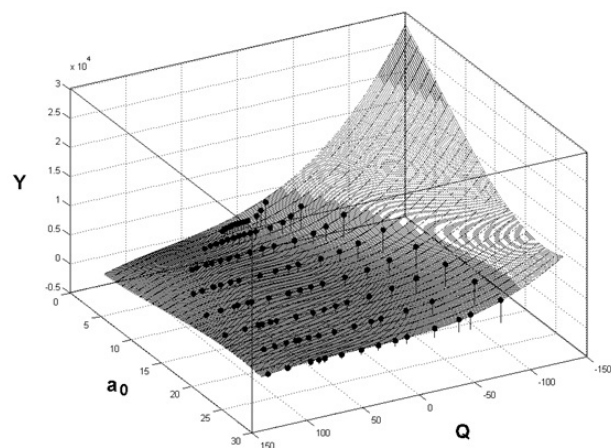
Tenzor koeficientů  $A_{ijk}$  má  $m+1$  řádků,  $n+1$  sloupců a  $s+1$  vrstev. Stejným způsobem se zadá funkce pro výpočet momentu. Musí být vytvořeny rovnice pro kladné otáčky stroje, záporné i nulové. V případě nulových otáček se volí prokládání průtokového koeficientu  $K_v$  a hodnoty se proloží funkcí:

$$K_v = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_0^{m-i} \cdot \beta^{n-j} \cdot A_{ij} \quad (147)$$

Pro pohodlnější proložení momentové charakteristiky při nulových otáčkách se zavede inverzní momentový odpor:

$$K_B = Q \cdot M^{-0,5} \quad (148)$$

Polynomicke funkce má stejný tvar jak (147). Tentýž tvar bude mít i funkce pro stanovení maximálního a minimálního průtoky, který ohraničuje oblast použitelnosti (146). Příklad takového proložení je na obr. 23, kde jsou měřené body a polynomicke funkce v závislosti na průtoky a otevření rozvaděče pro konstantní hodnotu  $\beta$ .

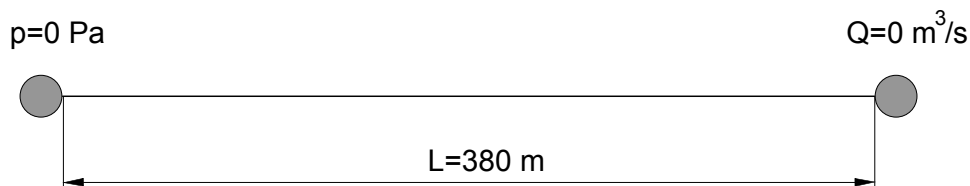


Obrázek 23: Proložení charakteristiky polynomickou plochou

Filosofie řešení je stejná jak u čerpadla. Pro známé hodnoty  $a_0$  a  $\beta$  se stanoví koeficienty polynomu měrné energie, případně momentu, takže vzniknou funkce závislé pouze na průtoku a je možné postupovat podle rovnic uvedených v kapitole 4.3.7 s tím, že se v (141) změní znaménko měrné energie.

## 5 Numerická viskozita

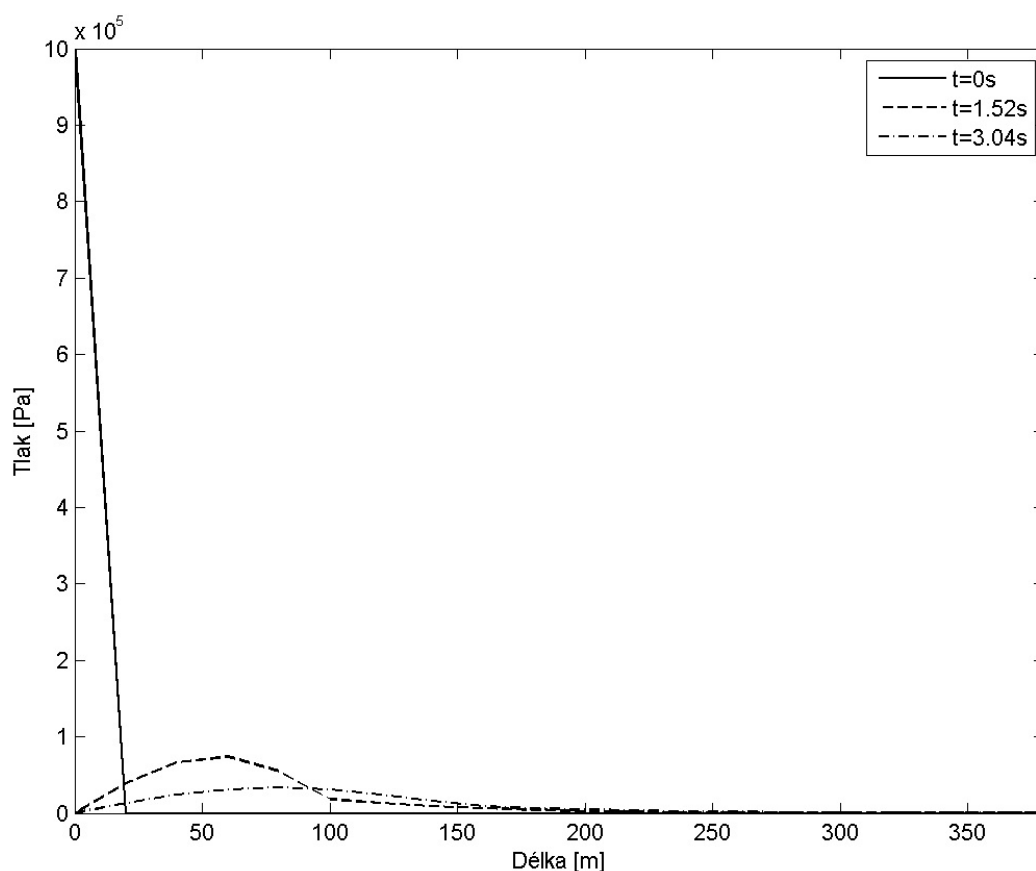
Nejprve malý příklad: Dokonale tuhé potrubí o délce 380 metrů na jehož počátku je okrajová podmínka nulového tlaku a na konci nulového průtoku, viz obrázek 24. V čase  $t_0 = 0$  s je po celé délce nulový průtok a nulový tlak s výjimkou prvního uzlu, ve kterém je tlak roven 1 MPa, ale v následujícím časovém kroku už je roven okrajové podmínce  $p = 0$  Pa.



Obrázek 24: Potrubí s okrajovými podmínkami

Za předpokladu nulového tření by v systému nemělo docházet k úbytku energie a tlakový impuls by se měl odrazet od jedné strany potrubí na druhou a zpět nekonečně dlouho s periodou  $T = 1,52$  s (při uvažované rychlosti zvuku 1000 m/s).

Realita je ovšem jiná. Na obrázku 25 je vykreslen tento impuls pro čas  $t = 0$  s,  $t = 1,52$  s a  $t = 3,04$  s nebo-li  $t = 0$  s,  $t = T$  a  $t = 2T$ , takže by všechny tři tvary měly splynout do jednoho. To se však neděje. Je patrný výrazný pokles výšky impulsu a také dochází k jeho fázovému posunutí.



Obrázek 25: Tlumení tlakového impulsu v podélném řezu

Tento jednoduchý příklad ilustruje, že dochází k útlumu, i když žádný není uvažován. V takovém případě se hovoří o vnitřním tlumení numerické metody.

Při jejím odvození byl využit *Taylorův rozvoj* podle (72) při čemž se zanedbaly další členy řady. Po formální stránce by bylo lepší napsat (72) následujícím způsobem:

$$f(x_j, t_{k+1}) = f(x_j, t_k) + \Delta t \frac{\partial f(x_j, t_k)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_j, t_k)}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (149)$$

Zanedbáním členu  $O(\Delta t^3)$  vzniká chyba, která se projeví jako numerická viskozita a způsobuje přídavné tlumení. Blíže je tento problém rozveden v [14]. Ačkoliv se tato vlastnost může zdát nežádoucí, tak navenek se projevuje podobně jak vliv druhé viskozity kapaliny a je vhodné se jím blíže zabývat.

## 5.1 Rovnice silové rovnováhy pro viskózní kapalinu

Pro posouzení vlivu druhé viskozity je nezbytné vyjít z *Navier-Stokesovy rovnice* pro viskózní kapalinu (48), tentokrát však v nepatrně jiném tvaru.

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial c_i}{\partial x_j} c_j = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \quad (150)$$

Člen  $\Pi_{ij}$  představuje disipaci energie. Může být rozepsán podle výrazu (151), kde část s dynamickou viskozitou  $\eta$  představuje ztráty vlivem různé rychlosti v rychlostním profilu a část s druhou viskozitou  $b_2$ , která představuje ztráty vlivem stlačitelnosti kapaliny.

$$\Pi_{ij} = \eta \left( \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right) + b_2 \delta_{ij} \frac{\partial c_k}{\partial x_k} \quad (151)$$

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = \eta \left( \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 c_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + b_2 \delta_{ij} \frac{\partial^2 c_k}{\partial x_j \partial x_k} \quad (152)$$

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\eta + b_2) \frac{\partial^2 c_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (153)$$

Poslední vztah se dosadí do (150), kde lze zanedbat konvektivní zrychlení za předpokladu, že rychlost proudění je mnohem nižší než rychlost zvuku.

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{(\eta + b_2)}{\rho} \frac{\partial^2 c_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (154)$$

Tuto rovnici lze přepsat zavedením *kinematické viskozity*  $\nu$  a *druhé kinematické viskozity*  $\nu_2$ .

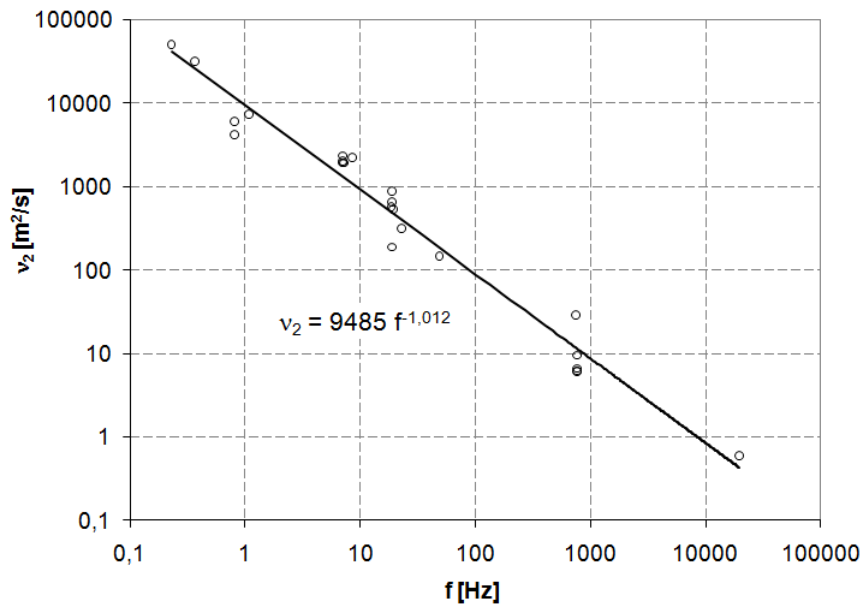
$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\nu + \nu_2) \frac{\partial^2 c_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (155)$$

Protože se jedná o proudění v potrubí, je možné uvažovat pouze složku rychlosti ve směru osy trubky a zbývající složky zanedbat. Po integraci přes element potrubí podle obr. 1 vznikne po úpravě:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - (2\nu + \nu_2) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{16\nu^2}{D^4} \int_0^t \Gamma(t - \tau) Q(\tau) d\tau + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (156)$$

Integrál v poslední rovnici vyjadřuje vliv nestacionárního rychlostního profilu. Byl odvozen v [5] a pro málo viskózní kapaliny (jako je např. voda) nemá významný vliv, takže ho lze zanedbat. Upravená *Navier-Stokesova rovnice* pak vypadá následovně:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - (2\nu + \nu_2) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (157)$$



Obrázek 26: Druhá kinematická viskozita v závislosti na frekvenci [6]

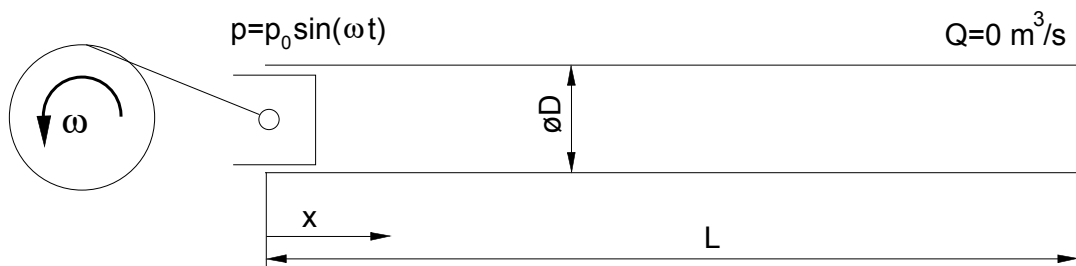
Postup pro zjištění druhé viskozity kapaliny je popsán v [6]. Výsledná funkční závislost na frekvenci je zobrazena na obr. 26. Z uvedeného grafu je zřejmé, že druhá kinematická viskozita může být popsána vztahem:

$$\nu_2 = \frac{H_\nu}{f} \quad (158)$$

## 5.2 Stanovení numerické viskozity

Numerickou viskozitu lze stanovit z frekvenčně – amplitudové charakteristiky. Obrázek 27 znázorňuje slepou dokonale tuhou trubku, která je zcela vyplněna vodou a na jejímž počátku je umístěn generátor tlakových pulsů. Kompletní popis je následující:

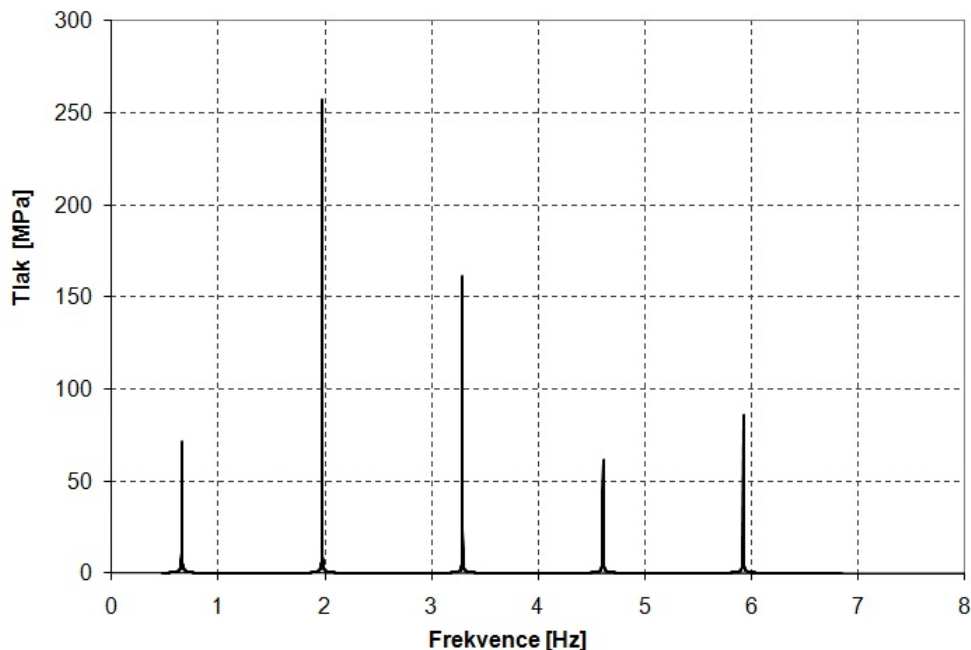
Délka:	$L = 380 \text{ m}$
Průměr:	$D = 0,3 \text{ m}$
Hustota kapaliny:	$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
Rychlost zvuku:	$v_0 = 1000 \text{ m/s}$
Amplituda buzení:	$p_0 = 100 \text{ kPa}$
Průtok na konci potrubí:	$Q(380) = 0 \text{ m}^3/\text{s}$



Obrázek 27: Buzení potrubí

Jelikož není uvažováno žádné tlumení (ať už vlivem tření nebo stlačitelností kapaliny), měla by frekvenčně – amplitudová charakteristika vypadat stejně jak na

obr. 28. Protože má metoda *Lax – Wendroff* numerický útlum, jak již bylo vysvětleno výše, odpovídá F-A charakteristika tlumenému systému obr. 29.



Obrázek 28: F-A charakteristika netlumeného systému

Útlum je závislý, kromě frekvence, také na délkovém a časovém kroku numerické metody. Délkový krok  $\Delta x$  je definován počtem řešených bodů  $N$  a délkou trubky  $L$ , viz obrázek 10.

$$\Delta x = \frac{L}{N - 1} \quad (159)$$

Časový krok  $\Delta t$  musí splňovat nerovnici (86). Aby byla velikost časového kroku jednoznačně určena, je vhodné zavést součinitel časového kroku  $c_k$ , jehož hodnota se nachází v rozmezí  $(0; 1)$ .

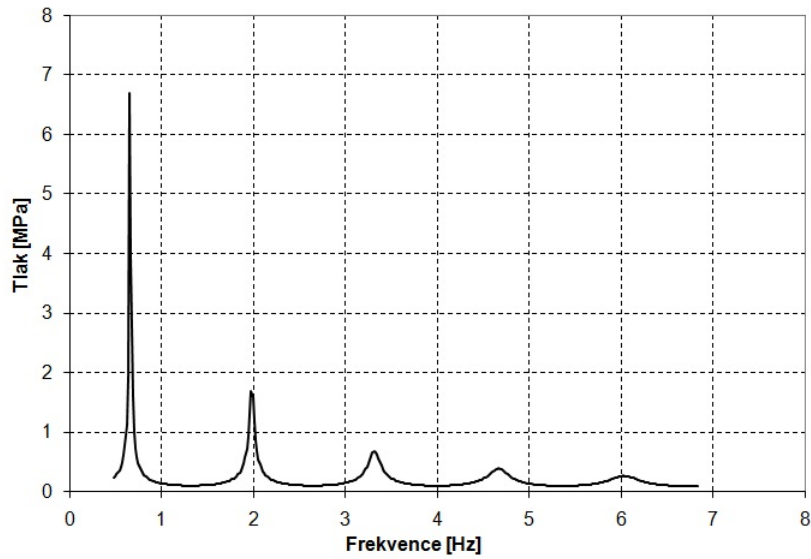
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_0} \cdot c_k \quad (160)$$

Pokud se dosadí za  $\Delta x$  ze (159), vznikne vztah pro velikost časového kroku, který je závislý na počtu bodů a součiniteli časového kroku:

$$\Delta t = \frac{L}{v_0} \cdot \frac{c_k}{N - 1} \quad (161)$$

Pro každou volbu  $c_k$  a  $N$  má metoda *Lax – Wendroff* jiný útlum, který mění F-A charakteristiku uvedeného systému. Příklad je na obr. 31. Obrázek 32 dokládá, že zároveň dochází k fázovému posuvu tlakové odezvy na konci trubky ( $x = L = 380$  m). I to je důsledek viskozity, ať už se jedná o numerickou nebo skutečnou.

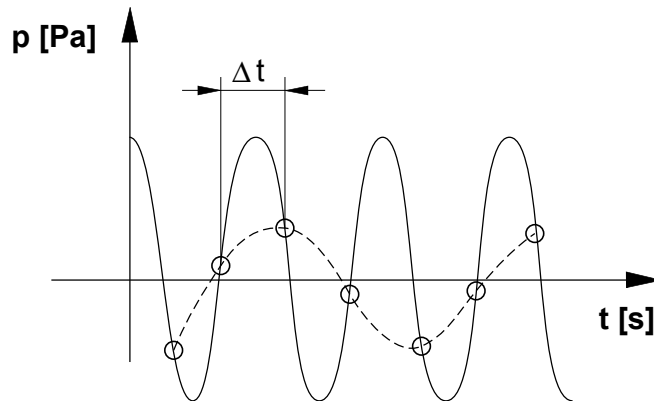
Pro stanovení velikosti numerického útlumu a jeho závislosti na délkovém a časovém kroku, byl vytvořen numerický model podle obr. 27, ve kterém se měnil počet bodů (délkový krok) a časový krok. Pro každou volbu  $c_k$  a  $N$  byla vytvořena frekvenčně – amplitudová charakteristika tak, že se stanovila tlaková odezva na konci potrubí pro různé frekvence buzení.



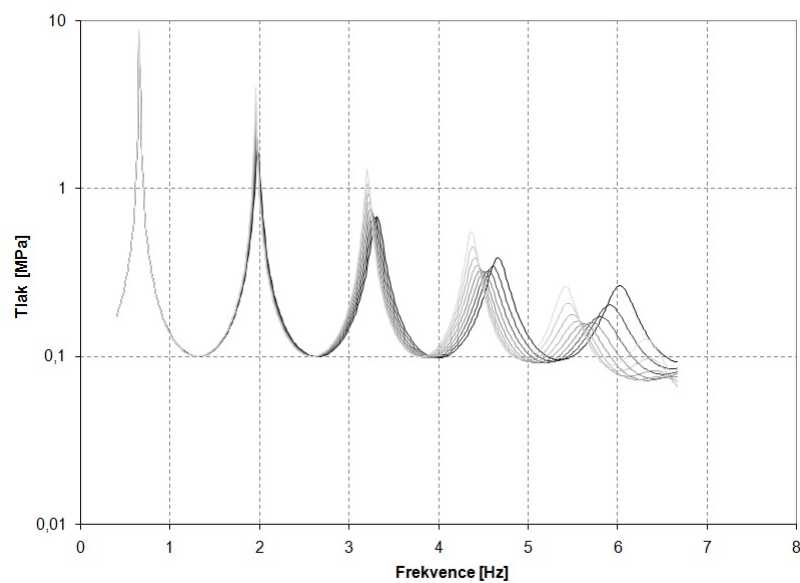
Obrázek 29: F-A charakteristika tlumeného systému

Frekvence buzení se měnila v rozmezí od 0,398 Hz do  $v_0/(7,5 \cdot \Delta x)$  Hz. Výsledná F-A charakteristika pro různé koeficienty  $c_k$  a jednu hodnotu  $N$  je na obr. 31. Maximální hodnota budící frekvence je omezena délkou časového kroku, který by neměl tvořit víc jak osminu periody budící sinusové funkce. V opačném případě by docházelo k jevu, který je v anglické literatuře nazýván *aliasing*, kdy v důsledku příliš nízké frekvence vzorkování dochází k záměně frekvencí.

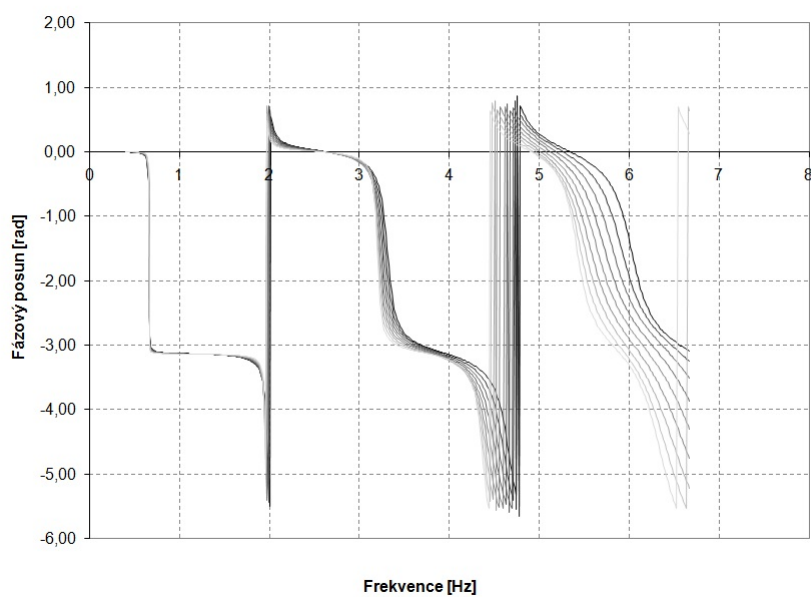
Princip objasňuje obr. 30, kde nevhodnou volbou délky časového kroku  $\Delta t$  došlo k nahrazení původního signálu (plná čára) jiným signálem (čárkovaná křivka).



Obrázek 30: Záměna frekvencí (aliasing)



Obrázek 31: F-A charakteristika pro různé hodnoty  $c_k$  ( $N = 20$ )



Obrázek 32: Fázový posun tlakové odezvy pro různé  $c_k$  ( $N = 20$ )



### 5.3 Vyhodnocení numerického útlumu

Velikost numerického útlumu se stanoví stejným postupem, jak byla stanovena druhá viskozita v [6]. Závislost druhé viskozity je definována vztahem (158), který se jeví jako nevhodný pro popis numerické viskozity, takže je třeba využít k proložení závislosti jiné funkce:

$$\nu_{num} = \frac{C_1}{f} + \frac{C_2}{\sqrt{f}} + C_3 \quad (162)$$

Hodnoty koeficientů  $C_1$ ,  $C_2$  a  $C_3$  jsou uvedeny v tab. 1 až 3 pro různé hodnoty časového koeficientu  $c_k$  a různé počty řešených bodů  $N$  po délce trubky.

Tabulka 1: Koeficient  $C_1$

$c_k$	$N$				
	11	13	15	18	20
1	8451,129809	-5282,577706	-4164,81201	-3094,051674	-2517,356565
0,9	-2951,010139	-1547,575293	-559,8909603	-119,0458094	-489,557234
0,8	2600,703915	2059,649463	2455,23677	2697,057012	2376,871939
0,7	6575,728263	5159,74234	4823,318457	4604,358268	4288,554829
0,6	9375,430813	7697,30884	6395,594869	5987,308948	5846,202272
0,5	10990,46952	9468,738389	7003,744741	6804,656019	6859,185184
0,4	10926,55317	10082,99939	7129,315256	6622,300086	7222,976512
0,3	9716,892879	9327,759531	6452,578375	6948,007651	6837,099756
0,2	7091,730318	7097,732662	4992,633544	6810,924269	5199,458679

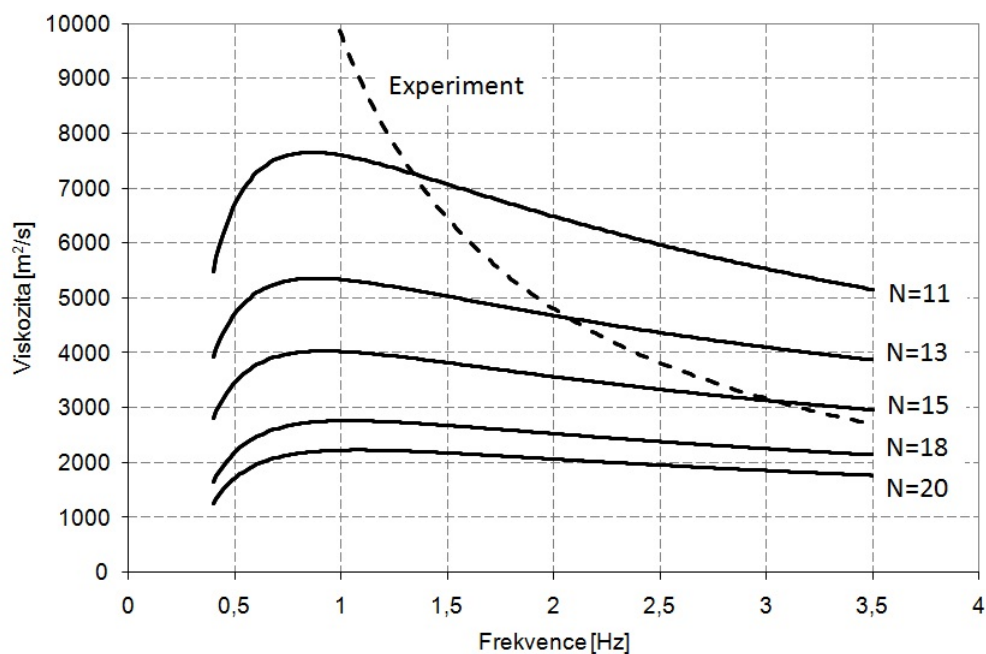
Tabulka 2: Koeficient  $C_2$

$c_k$	$N$				
	11	13	15	18	20
1	18227,3378	11248,22311	8678,519163	6079,182708	4848,964322
0,9	6483,906651	3434,590518	1413,147232	410,4941651	752,1994899
0,8	-4919,502979	-3896,280511	-4588,793019	-4771,443222	-4104,682732
0,7	-13198,26102	-10127,25868	-9251,868612	-8377,834611	-7464,834063
0,6	-19012,53179	-15159,43301	-12348,38141	-10913,58534	-10103,70064
0,5	-22329,8089	-18602,29915	-13615,82784	-12314,8436	-11732,52926
0,4	-22276,42716	-19756,97887	-13793,40086	-11985,98447	-12156,26452
0,3	-19793,4467	-18238,99778	-12405,64371	-11959,14942	-11207,25475
0,2	-14417,36397	-13864,37382	-9510,261239	-11767,94476	-8329,30123

Výsledná závislost numerické viskozity na frekvenci má odlišný průběh než závislost druhé viskozity stanovená experimentem (obr. 26). Nicméně, její hodnoty se pohybují v podobných mezích jak dokládá příklad na obr. 33. Dále je zajímavé, že numerický útlum má klesající charakter pro frekvence nižší než cca 1 Hz (v případě  $c_k = 1$ ). To je v ostrém kontrastu s druhou viskozitou, která v této oblasti prudce narůstá. Naopak při jiné volbě  $c_k$  hodnota  $\nu_{num}$  pro nízké frekvence stoupá, viz obr. 34.

Tabulka 3: Koeficient  $C_3$ 

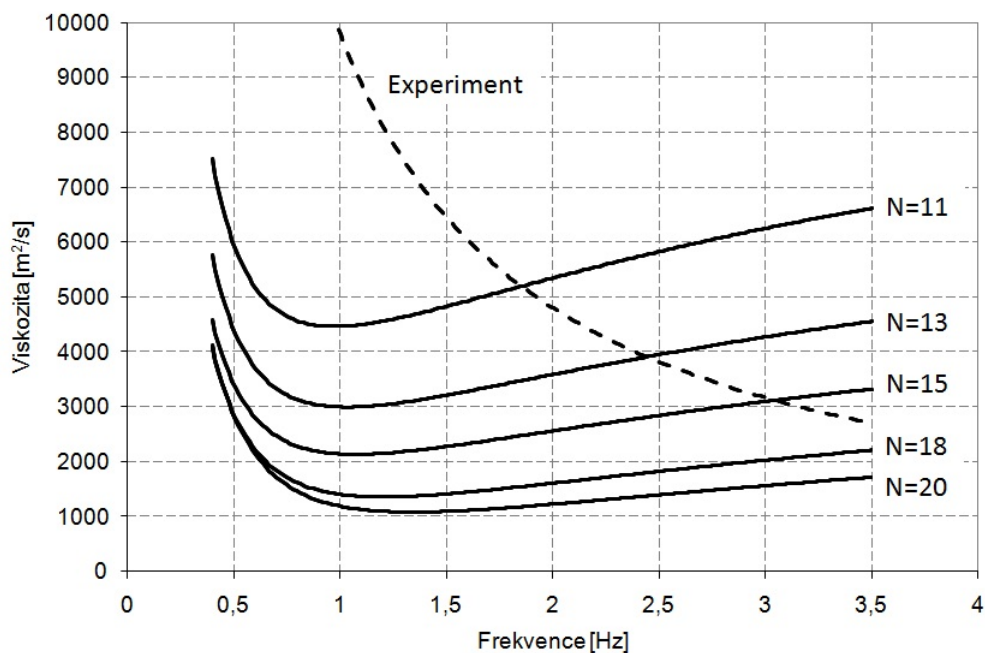
	$N$				
$c_k$	11	13	15	18	20
1	-2177,643687	-633,5269282	-491,9268019	-226,8158566	-108,6141596
0,9	3237,130387	2841,622699	2617,758942	2061,37567	1574,522693
0,8	8252,022241	5964,534778	5108,530136	4069,824196	3343,415733
0,7	11790,76991	8514,583016	6958,667457	5442,69013	4556,509469
0,6	14099,70084	10455,12837	8090,524525	6327,630357	5443,333755
0,5	15162,10414	11623,27316	8414,634863	6703,505629	5908,250118
0,4	14633,56026	11740,33452	8190,572909	6386,717538	5876,800943
0,3	12897,23201	10654,20173	7266,776392	6009,368976	5291,062484
0,2	9778,445326	8297,976509	5681,848235	5950,120015	4013,178503


 Obrázek 33: Porovnání numerické a druhé viskozity pro různá  $N$  ( $c_k = 1$ )

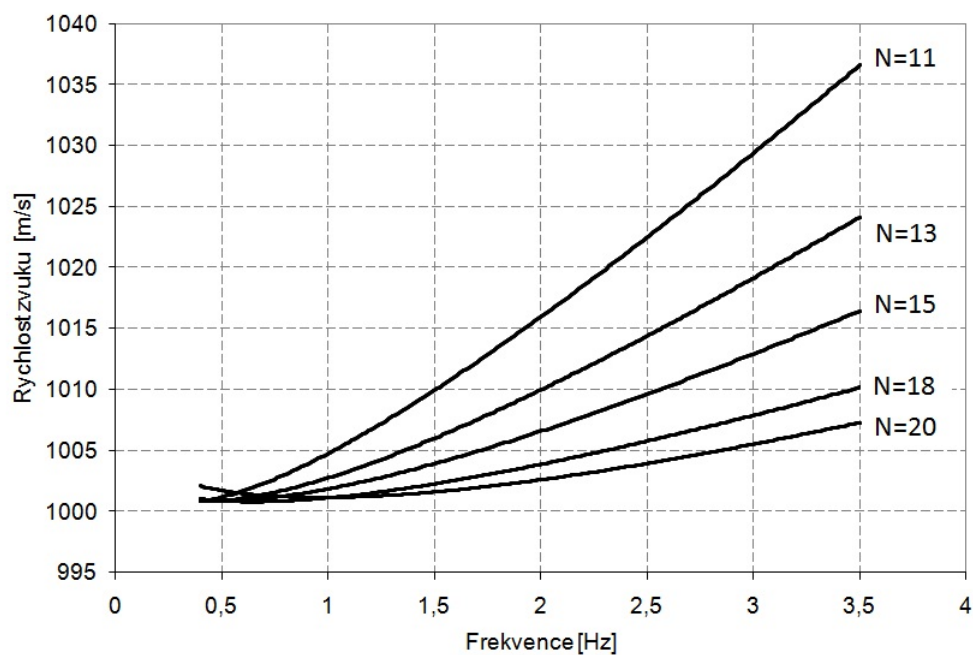
Dalším průvodním jevem je, že ačkoliv byla uvažována konstantní rychlost zvuku 1000 m/s, tak z vyhodnocení odezvy plyne, že konstantní není. Závislost rychlosti zvuku na frekvenci podle rovnice (163) je na obr. 35 a 36.

$$v_0 = C_4 + C_5 \cdot \sqrt{f} + C_6 \cdot f \quad (163)$$

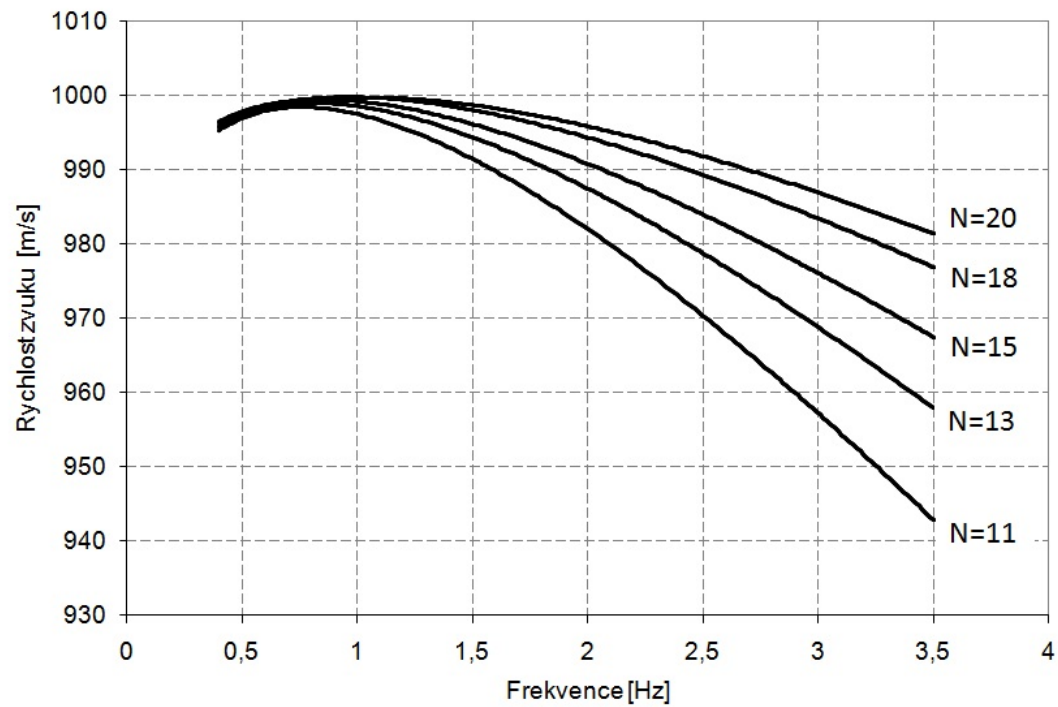
Hodnoty koeficientů rovnice jsou uvedeny v tabulkách 4 až 6.



Obrázek 34: Porovnání numerické a druhé viskozity pro různá  $N$  ( $c_k = 0,6$ )



Obrázek 35: Závislost rychlosti zvuku pro různé volby  $N$  ( $c_k = 1$ )


 Obrázek 36: Závislost rychlosti zvuku pro různé volby  $N$  ( $c_k = 0,6$ )

 Tabulka 4: Koeficient  $C_4$ 

	$N$				
$c_k$	11	13	15	18	20
1	1007,256334	1007,418135	1006,931561	1006,024313	1008,594384
0,9	996,537957	997,5445149	999,8110796	1000,907743	1003,297575
0,8	986,4511177	988,4200016	989,6385757	989,6358632	989,4298575
0,7	972,2672177	976,4643392	979,479451	980,9441543	981,7828533
0,6	956,2754846	963,5214391	969,3677123	972,1134141	972,6706411
0,5	938,1565509	947,926736	959,6104002	961,7159247	963,074716
0,4	921,5240332	932,1599193	947,3258203	953,1044593	952,4803054
0,3	902,7462557	916,2698979	936,0890144	952,8170152	941,6510225
0,2	888,4106386	902,0078849	927,1932095	951,3918481	933,2059677

Tabulka 5: Koeficient  $C_5$ 

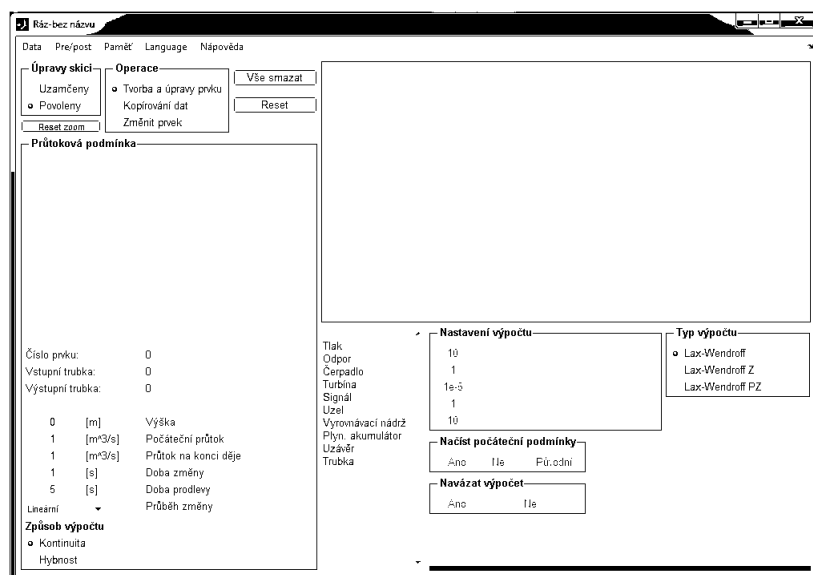
	$N$				
$c_k$	11	13	15	18	20
1	-23,38602476	-20,29668866	-16,77226435	-13,1148843	-15,23266997
0,9	2,793251631	2,403179248	-0,062542679	-0,602748724	-3,395525592
0,8	28,25412834	24,0028202	21,58141869	20,46887542	19,84950004
0,7	60,89593274	50,43876758	43,37495334	38,29376535	35,21967336
0,6	96,67868296	78,57228288	65,14532413	56,35731991	52,61240342
0,5	135,9427877	111,0870317	86,19965772	76,3936193	70,66094309
0,4	172,0998898	143,6460314	110,6197252	93,57795874	89,8213545
0,3	211,1651963	175,8337307	132,8617235	98,72980222	108,8410007
0,2	241,1272982	204,3050881	150,567665	100,9285622	123,9445269

Tabulka 6: Koeficient  $C_6$ 

	$N$				
$c_k$	11	13	15	18	20
1	20,87112351	15,61960118	11,67690077	8,184800599	7,763672107
0,9	3,021228293	1,316947681	1,044810474	0,325301073	0,842870872
0,8	-14,46122778	-12,42847711	-11,2043684	-10,10402076	-9,402851078
0,7	-34,52755719	-27,8129566	-23,39107217	-19,47399404	-17,27425731
0,6	-55,52353676	-43,61529266	-35,37959769	-28,7752886	-25,64227312
0,5	-77,44813917	-60,77686552	-46,82277465	-38,45356388	-34,05938104
0,4	-97,52284935	-77,55839556	-58,98868849	-46,90711138	-42,56609638
0,3	-117,9255451	-93,62439968	-69,88429217	-51,14598483	-50,66465877
0,2	-133,6209415	-107,4945579	-78,52791005	-51,88357053	-57,08237707

## 6 Program *Ráz*

Na základě vztahů odvozených v kapitole 4 byl sestaven počítačový program nazvaný *Ráz*. Tento program je určený pro výpočet nestacionárního proudění v potrubních systémech a dále je popsán princip funkce a možnosti výpočtu. Kompletní software byl vyvinut v prostředí *Matlab* a na obr. 37 je zobrazena úvodní obrazovka programu.



Obrázek 37: Úvodní obrazovka

Dále není uveden žádný podrobný návod, jak s programem pracovat (k tomu poslouží příručka), ale je pouze naznačeno, jaké jsou možnosti výpočtu a vyhodnocení.

### 6.1 Příprava úlohy

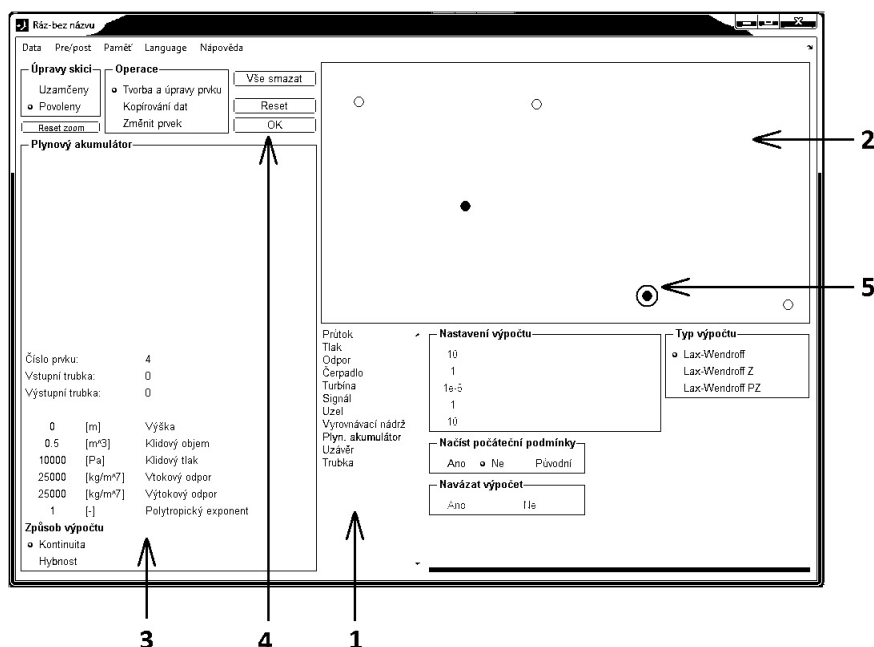
Program je rozdělen na dvě části. První z nich je příprava výpočetní úlohy tzv. pre-processing. Než se uživatel pustí do práce, musí vědět, co chce řešit. To znamená, že musí znát celý hydraulický systém, který chce modelovat (geometrii, vlastnosti, druhy hydraulických prvků, ...). Teprve po té lze usednout k počítači a začít tvořit.

Nejprve se zadávají okrajové podmínky. K dispozici jsou:

- **Průtok** – přímo zadaná hodnota průtoku, která může být buď konstantní nebo se může měnit podle některé jednoduché funkce jako je například přímka. Nemůže fungovat jako spojovací prvek mezi dvěma trubkami.
- **Tlak** – viz průtoková okrajová podmínka.
- **Odpor** – pod ním si lze představit jakoukoliv místní ztrátu (koleno, ventil, difuzor, clona, ...). Odpor, může být definován pomocí ztrátového nebo průtokového součinitele, které se mohou během výpočtu měnit. Je možné zadat jedny hodnoty pro pozitivní směr proudění a jiné pro negativní.
- **Čerpadlo** – umožňuje zadat kompletní charakteristiky čerpadla a motoru pro konstantní i proměnné otáčky pomocí polynomu.
- **Turbína** – viz čerpadlo.
- **Signál** – zvláštní případ okrajových podmínek *tlak* a *průtok*. Lze zadat naměřené hodnoty tlaku nebo průtoku z \*.txt souboru. Opět nemůže být využit jako spojovací element.

- **Uzel** – pravděpodobně nejsložitější okrajová podmínka. Umožňuje spojení libovolného počtu trubek a každá z nich může mít svůj vlastní vstupní nebo výstupní odpor, který je definován pomocí součinitele ztrát nebo průtokového součinitele. Jejich hodnoty se mohou v čase měnit a mohou být odlišné podle orientace proudění.
- **Vyrovňovací nádrž** – zadává se její průřez, který nemusí být konstantní. Definuje se i výška nádrže, takže lze uvažovat přetečení.
- **Plynový akumulátor** – je určený klidovým objemem a tlakem plynu, takže se během výpočtu mění jeho kapacita. Lze určit i hodnoty vtokového a výtokového odporu.

U všech okrajových podmínek se také definuje výška, ve které jsou umístěny. Jejich rozložení na pracovní ploše nemá na výpočet žádný vliv, proto se výsledný obrázek nazývá *skica*. Na obrázku 38 je příklad okrajových podmínek. Program umožňuje i nastavit, které rovnice se použijí při výpočtu okrajových podmínek. Bud' to bude rovnice kontinuity nebo hybnosti.



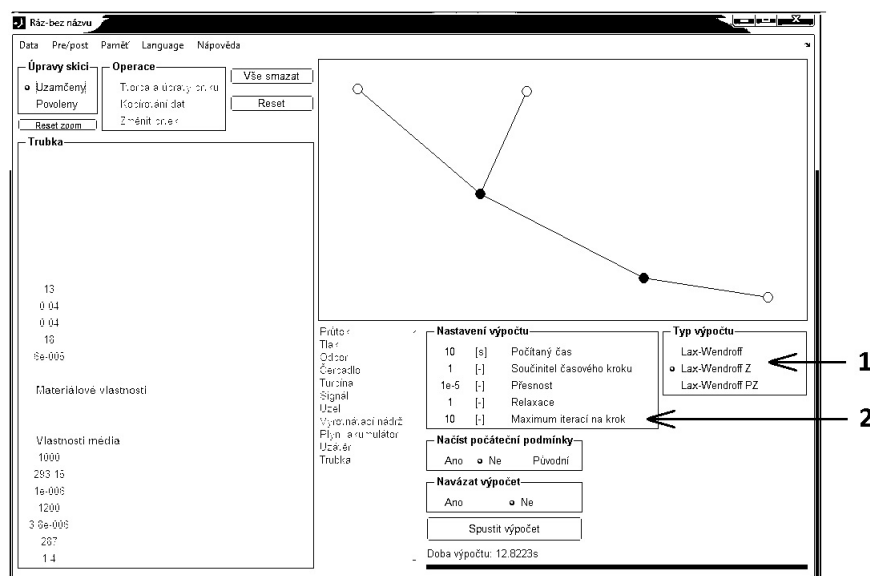
Obrázek 38: Zadané okrajové podmínky

Okrajová podmínka se vytváří tak, že se vybere ze seznamu (č. 1 na obrázku) a klikne se do prostoru skici (č. 2). Dále se v tabulce vlastností vyplní požadované položky (č. 3) a následně se potvrdí stiskem tlačítka *OK* (č. 4). Pokud je třeba něco změnit, může uživatel kdykoliv kliknout na libovolnou okrajovou podmínku ve skice a změnit její parametry.

Tabulka vlastností se mění podle toho, který prvek je vybrán. Aktuální prvek je označen kroužkem (č. 5).

Dalším krokem je pospojování jednotlivých okrajových podmínek pomocí trubek. To se provede tak, že se v seznamu (č. 1) vybere položka *Trubka* a ve skice se vyberou dva prvky, které se mají spojit. Podle pořadí výběru se určuje orientace potrubí. Po té se vyplní tabulka vlastností trubky a vše se potvrdí tlačítkem *OK*.

V této fázi už by měl uživatel vědět, jakou úlohu bude počítat. Jestli obyčejnou metodou *Lax-Wendroff* nebo s uvažováním proměnné rychlosti zvuku, případně s proměnnou rychlostí zvuku a pružným potrubím. Požadovaná metoda se volí zahrnutím příslušného tlačítka, viz obr. 39 (č. 1). Podle toho se zpřístupní položky v tabulce vlastností trubky, takže se uživatel nemusí rozhodovat, co potřebuje vyplnit a co ne.

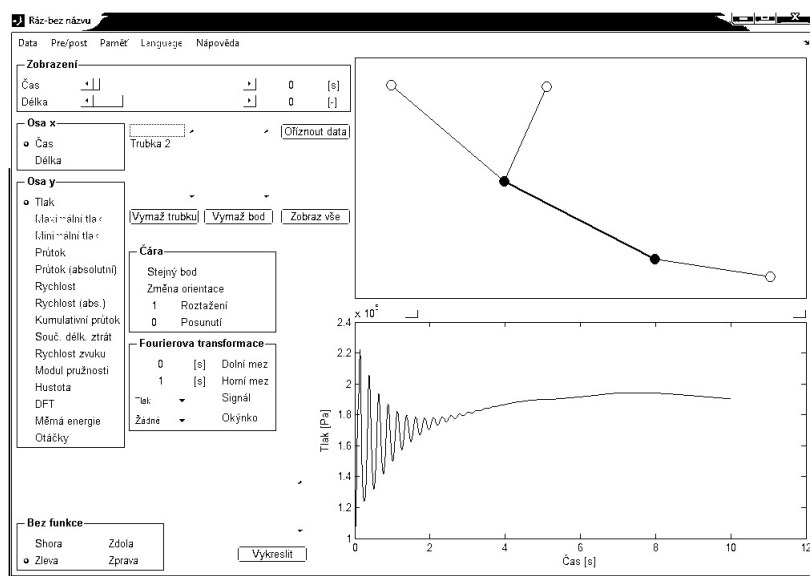


Obrázek 39: Nastavení výpočtu

Po vytvoření kompletního modelu se nastaví požadované parametry výpočtu (č. 2). Nejdůležitější z nich jsou počítaný čas a součinitel časového kroku a může se spustit výpočet. Jeho doba záleží na složitosti řešeného systému, jeho velikosti a zejména na počtu časových kroků.

## 6.2 Zpracování výsledků

Po ukončení výpočtu lze postoupit do části pro vyhodnocení výsledků (obr. 40). V horním okně je zobrazena skica a ve spodním okně se vykreslují grafy. Je možné si prohlédnout průběh různých veličin v jednom bodě (jako funkci času) nebo průběh po délce potrubí v jednom časovém okamžiku. Mezi tyto veličiny patří zejména tlak, průtok, rychlost, rychlost zvuku a další. Také lze vykreslit F-A charakteristiku tlaku nebo průtoku.



Obrázek 40: Vyhodnocení



### 6.3 Export a import dat

Program pracuje s následujícími soubory textovými soubory v *ASCII* kódu:

- **\*.zad** – matice zadání slouží k uchování všech údajů o řešené úloze, podle této matice se vykresluje skica.
- **\*.vys** – matice výsledků uchovává hodnoty tlaku a průtoku v každém uzlu pro všechny časové kroky.
- **\*.poz** – pomocná matice sloužící k orientaci v souboru s výsledky.

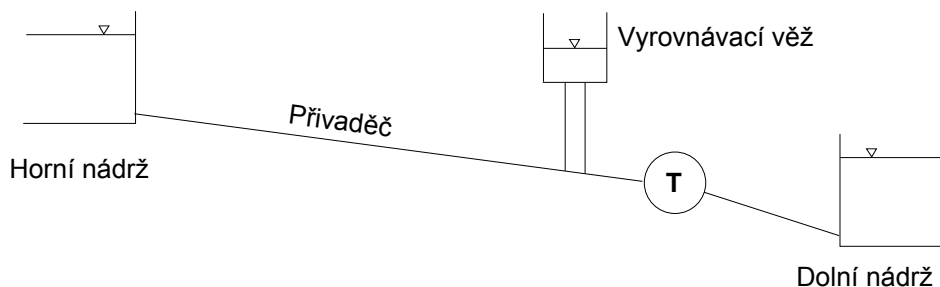
Další důležitou částí jsou grafické výstupy, které ovšem nelze zpětně načíst.

- **Skica** – obrázek potrubní sítě s označením všech prvků (okrajových podmínek a trubek).
- **Tabulka zadání** – Excelovská tabulka se seznamem prvků zobrazených ve skice a jejich charakteristikou.
- **Graf** – obrázek, ve kterém jsou vykresleny průběhy požadovaných veličin v závislosti na čase nebo poloze.

## 7 Experiment

### 7.1 Příklad první

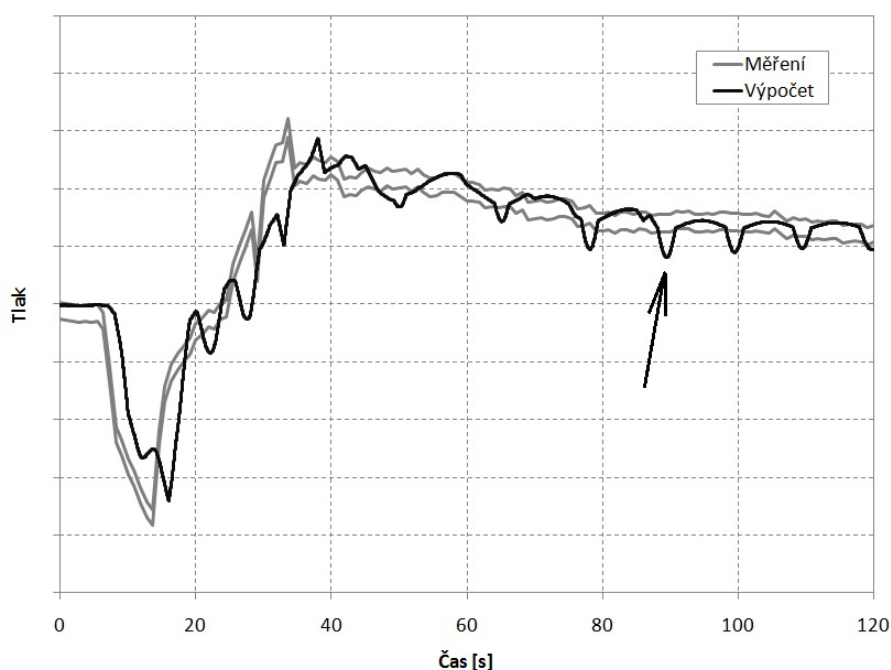
Program *Ráz* byl již během svého vývoje několikrát využit pro řešení reálných problémů. Jedním z nich je výpočet vodního rázu při výpadku turbíny malé vodní elektrárny. Jedná se o přivaděč, který je chráněn vyrovnávací nádrží umístěnou v blízkosti stroje, aby tlumil tlakové pulsace při odstavení nebo výpadku. Schéma je na obr. 41.



Obrázek 41: Schéma MVE

První část přivaděče je tvořena betonovým potrubím, na které navazuje plastové potrubí a poslední část (mezi vyrovnávací nádrží a turbínou) je ocelová. Trať je projektovaná pro dva stroje, ale v první fázi byla osazena pouze jedním. Bylo zadáno, že maximální nárůst tlaku musí být co nejmenší, aby nedošlo k poškození betonové části přivaděče.

Maximální výška i plocha vyrovnávací nádrže byla omezena konstrukčními požadavky a tak jediným volným parametrem zůstalo zavírání uzávěru před turbínou. Z výpočtů vyplynulo, že pokud zavírání trvá alespoň jednu minutu, tak dochází k přijatelnému nárůstu tlaku a přivaděč není ohrožen.



Obrázek 42: Porovnání výpočtu a měření

Při uvádění elektrárny do provozu byl změřen výpadek stroje ze sítě. Na obr. 42 je porovnaný měřený tlak před turbínou s vypočteným. Měření je zobrazeno pomocí dvou šedých čar, které znázorňují nejistotu měření.

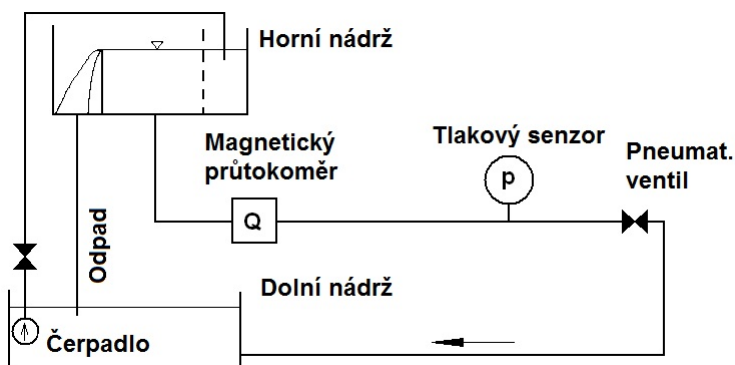
Je zřejmé, že výsledek se poměrně přesně shoduje s realitou. Výraznější poklesy tlaku, z nichž jeden je označen šipkou, jsou způsobeny vyprázdňením vyrovnávací komory, ke kterému při skutečném výpadku nedocházelo. Pravděpodobně je dno nádrže umístěno níže, než bylo uvažováno při výpočtu.

Na obrázku 42 není uveden nejhorší možný stav, protože na lokalitě nepanovaly požadované podmínky. Rozdíl horní a dolní hladiny nebyl nejvyšší možný. Nejvíce nebezpečný případ nastane při maximálním průtoku dvěma stroji, při jejichž výpadku a následném zavírání uzávěru dojde k výraznému přelítí vyrovnávací věže. To ovšem nepředstavuje problém a při stavbě byl vytvořen odpadní kanál, který vodu odvede.

## 7.2 Příklad druhý

V rámci ověření modelu s určitým množstvím vzduchu ve vodě, bylo provedeno porovnání výpočtu s experimentálními daty. Porovnání bylo prezentováno v [8] a experimentální data byla převzata z [7].

Jedná se o jednoduchý hydraulický okruh sestávající se z horní a dolní nádrže, které jsou spojeny ocelovým potrubím, na němž je umístěn pneumatický ventil sloužící k rychlému zavírání a vybuzení vodního rázu. Podrobný popis okruhu je v tab. 8 a na obr. 43.



Obrázek 43: Experimentální okruh

V čase  $t = 0$  s je v potrubí při plně otevřeném ventilu ustálené proudění o počáteční rychlosti  $0,599$  m/s. V čase  $0,5$  s začíná zavírání ventilu a vzniká vodní ráz, jehož průběh je zobrazen na obr. 44. Nejedná se o totální ráz, jelikož potrubí je ocelové a relativně krátké. V tabulce 7 je uvedena charakteristika pneumatického ventilu, která je definovaná pomocí relativního otevření  $z$  a průtokového koeficientu  $K_v$ .

Tabulka 7: Charakteristika ventilu

$z$ [-]	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$K_v$ [m <sup>3</sup> /s]	0	3,75	7,82	12,37	18,33	26,09	36,01	52,18	82,51	165	300

Při vytváření numerického modelu se horní nádrž nahradí podmínkou konstantního tlaku, koncovou okrajovou podmínkou je uzávěr, za kterým je konstantní tlak nastaven tak, aby rychlost ustáleného proudění byla stejná jak při experimentu. Potrubí je modelováno jen jednou trubkou mezi horní nádrží a ventilem. Podrobné nastavení zobrazuje tab. 9, jejíž vyplnění není triviální záležitost.

Geometrické rozměry lze odměřit, materiálové a fyzikální vlastnosti mohou být stanoveny z příslušných zdrojů (hustota vody může být určena přesněji podle IAPWS, ale chyba není významná). Zbývají dvě položky, jejichž hodnoty musí být zjištěny

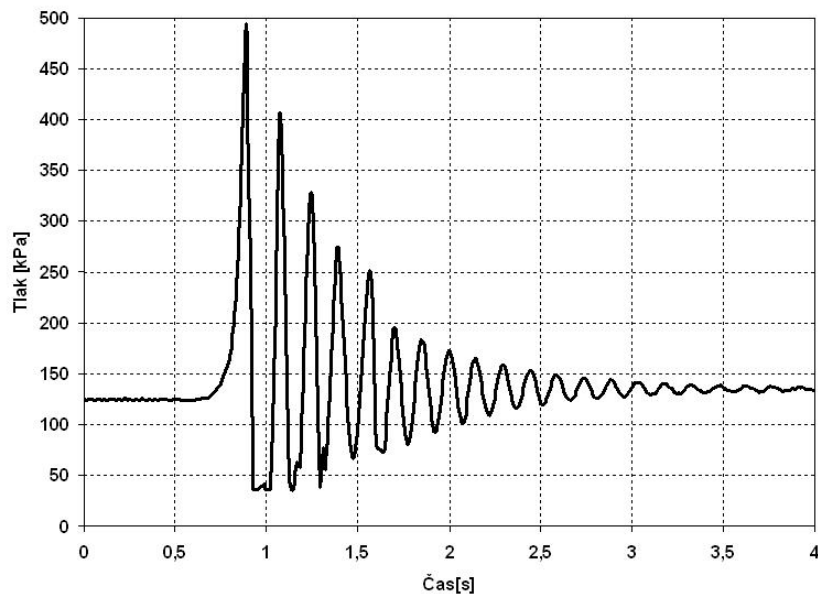
Tabulka 8: Popis tratě

Popis	Hodnota	Jednotka
Délka potrubí od horní nádrže po ventil	32,25	m
Vzdálenost tlakoměru od ventilu	6,2	m
Výška hladiny v horní nádrži (měřeno od ventilu)	3,6	m
Spád	7,7	m
Průměr potrubí	36,13	mm
Tloušťka stěny potrubí	2,5	mm
Teploty vody	19	°C
Počáteční rychlost proudění	0,599	m/s
Doba zavírání ventilu	0,485	s

oklikou podle obr. 44. Jedná se o hmotnostní poměr vzduchu a útlum v materiálu potrubí.

Ze záznamu tlaku na obr. 44 lze podle frekvence kmitů mezi třetí a čtvrtou vteřinou stanovit skutečnou rychlost zvuku. Frekvence se musí odečíst z doby, kdy je tlaková amplituda malá, takže se rychlost zvuku málo mění.

$$v_s = 4 \cdot L_p \cdot f \quad (164)$$



Obrázek 44: Záznam vodního rázu

Z postupu uvedeného v [24] je možné vypočítat rychlost zvuku v pružném potrubí.

$$v_p = \sqrt{\frac{K_k \cdot \Delta \cdot E}{\rho (\Delta \cdot E + K_k \cdot D \cdot c)}} \quad (165)$$

Rychlost získaná z (165) je poměrně vysoká ( $v_p = 1365$  m/s), ale rychlost stanovená podle (164) je pouze 720 m/s. Je to dáno tím, že u  $v_p$  je zahrnut pouze vliv pružné stěny potrubí, ale již nepostihuje obsažený vzduch. Z tohoto rozdílu lze dopočítat

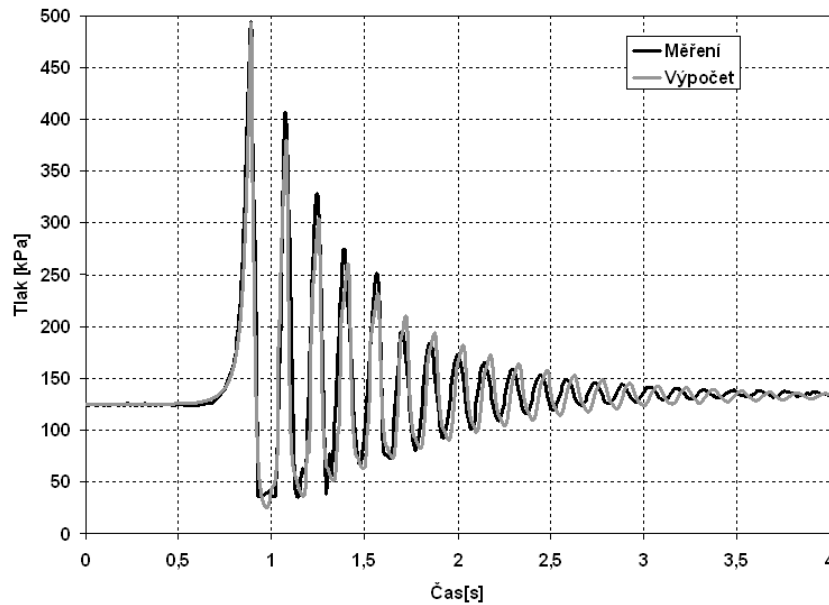
Tabulka 9: Numerický model

Popis	Hodnota	Jednotka
Délka trubky	32,25	m
Počet bodů	23	-
Tlak na počátku trubky	133,287	kPa
Tlak za uzavěrem	59,843	kPa
Průměr trubky	36,13	mm
Tloušťka stěny potrubí	2,5	mm
Teploty vody	19	°C
Modul pružnosti materiálu potrubí	$2,42 \cdot 10^{10}$	Pa
Útlum v materiálu potrubí	$3,5117 \cdot 10^9$	Pa·s
Hmotnostní poměr vzduchu	$2,5726 \cdot 10^{-7}$	-
Kinematická viskozita	$10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
Hustota vody	1000	kg/m <sup>3</sup>
Rychlost zvuku ve vodě	1475	m/s

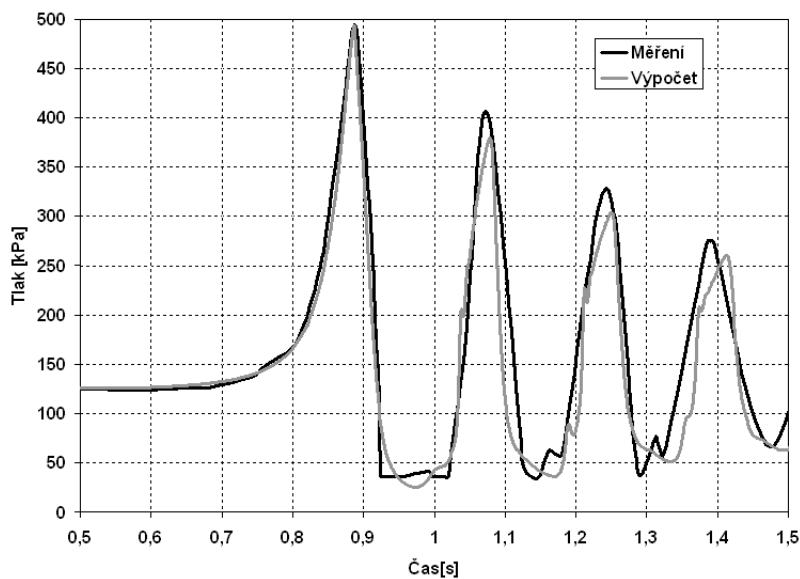
obsažené množství vzduchu podle vztahů uvedených v kapitole 3 tak, že se dosadí za rychlost v kapalině  $v_{0k} = v_p$ .

Velikost útlumu se musí získat iteračně tak, aby výsledné tlumení odpovídalo skutečnému útlumu systému.

Porovnání výsledku s měřením je na obr. 45 a 46. Špičky tlakových pulsů jsou vlivem vyšší rychlosti zvuku ostřejší než místa s nízkým tlakem, kde je rychlost zvuku výrazně nižší. Průběh změn rychlosti zvuku je znázorněna na obr. 47. Hodnota osciluje mezi 150 a 950 m/s. V extrémních případech může klesat až na hodnoty blízké nule (např. 4 m/s). Je otázka, kdy je ještě splněn předpoklad, že rychlost proudění kapaliny je mnohem menší než rychlost zvuku, za kterého byla odvozena rovnice kontinuity v kapitole 2.4.

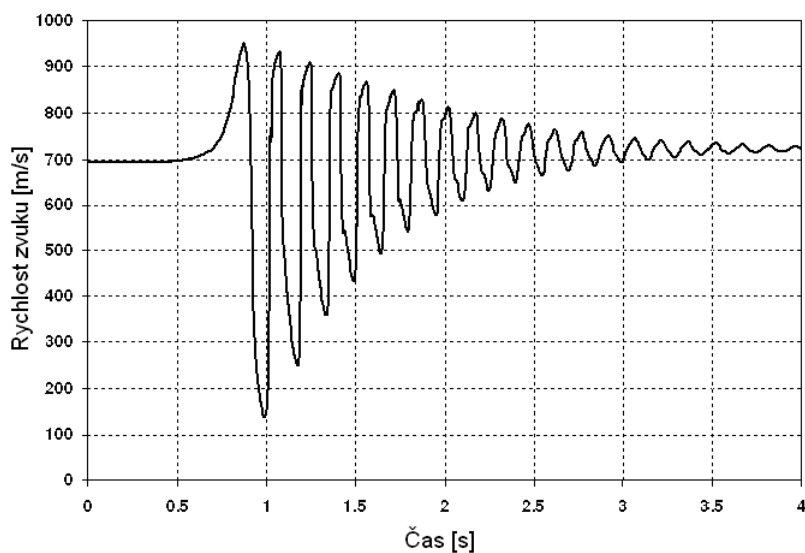


Obrázek 45: Porovnání výpočtu s experimentem



Obrázek 46: Porovnání výpočtu s experimentem – detail

Při výpočtech, u kterých dochází ke strmému poklesu tlaku na hodnoty blízké nule, může dojít k překmitnutí do záporného tlaku. V takovém případě výpočet nezko-labuje, ale okamžitě dojde k útlumu a výsledek je „nesmyslný.“ Náprava je možná zkrácením časového kroku (třeba až desetkrát), které ovšem vede k výraznému pro-dloužení výpočetního času.



Obrázek 47: Změny rychlosti zvuku během výpočtu

## 8 Závěr

Řešení problematiky proudění v potrubních sítích je významnou součástí návrhu hydraulických systémů. V tomto speciálním případě je možné uvažovat proudění jako jednorozměrné a podle toho upravit příslušné vztahy, konkrétně *Navier – Stokesovy a rovnici kontinuity*. Nelze zanedbat vliv potrubí, které bývá tenkostěnné a velmi často z pružných materiálů, které se při změnách tlaku roztahují a smršťují. Tato poddajnost snižuje rychlost zvuku a tím ovlivňuje intenzitu vodního rázu vyvolaného nestacionárním prouděním. Vliv potrubí může být zahrnut do paměťové funkce, která je na pravé straně rovnice kontinuity.

Další významný faktor ovlivňující rychlost zvuku je vzduch rozptýlený ve vodě nebo obecněji: plyn rozptýlený v kapalině. Vzduch je oproti vodě výrazně stlačitelný a mění tak objemový modul pružnosti proudícího média. Rychlost zvuku se tím stává závislou na statickém tlaku. Tuto závislost lze poměrně jednoduše odvodit, pokud se neuvažuje rozpustnost plynu v kapalině.

Vhodně upravené rovnice popisující proudění kapaliny v potrubí jsou řešitelné pomocí numerické metody *Lax – Wendroff*. Řešení je přesně určeno okrajovými podmínkami, které jsou odvozeny tak, aby popisovaly chování konkrétních hydraulických prvků jako je čerpadlo, turbína, vyrovnávací komora, odpor, spoj více trubek atd.

Na základě odvozeného numerického postupu byl vytvořen software s pracovním názvem *Ráz*, který je určen pro řešení nestacionárního proudění v soustavách potrubí. Nejedná se jen o vodní ráz vyvolaný uzavřením ventilu, ale také o přechodové stavy čerpadla a jiné nestacionární jevy. Do výpočtu je možné zahrnout vliv pružného potrubí i obsaženého plynu v kapalině. Program není omezen jen na výpočty s vodou, ale může pracovat s libovolnou Newtonskou kapalinou.

Metoda *Lax – Wendroff* je založena na částečném *Taylorově rozvoji* funkce, takže má určitý numerický útlum, který, na rozdíl od *metody charakteristik*, způsobuje nepřesné řešení analytických rovnic. Nicméně, tento útlum je podobný vlivu *druhé viskozity*, která nebyla vůbec uvažována, takže výsledný efekt má spíše pozitivní charakter.

Porovnání výpočtu v programu *Ráz* s měřením dokládá, že odvozený numerický postup funguje správně a může být použit k řešení konkrétních problémů.

## Reference

- [1] ALFORQUE, R. A. – SAWADA, Y. – NISHIHARA, H. Measurement of Acoustic Velocity and Attenuation in an Air-Water Two-Phase Medium. *Journal of Nuclear Science and Technology*. 1977, 14, 2, s. 156–158.
- [2] BRDIČKA, M. – SAMEK, L. – SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. Praha : Academia, 2000. ISBN 80-200-0772-5.
- [3] BRUNONE, B. – GOLIA, U. M. – GRECO, M. Some Remarks on the Momentum Equations for Fast Transients. V *International Meeting on Hydraulic Transients with Column Separation, 9th Round Table*, s. 201–209, Valencia, Spain, 1991.
- [4] COSTIGAN, G. – WHALLEY, P. B. Measurements of the Speed of Sound in Air-Water Flows. *Chemical Engineering Journal*. 1977, 66, s. 131–135.
- [5] HABÁN, V. *Tlumení tlakových a průtokových pulsací*. Diserační práce, VUT v Brně FSI, 2001. Školitel Prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [6] HABÁN, V. *Vysokofrekvenční pulsace ve vodních strojích*. Habilitační práce, VUT v Brně FSI, 2010.
- [7] HABÁN, V. Rázy v potrubí a Gibsonova metoda. Diplomová práce, VUT v Brně FSI, 1994. Vedoucí práce: Ing. Ondřej Debrecení, CSc.
- [8] HIMR, D. – HABÁN, V. Simulation of Low Pressure Water Hammer. *IOP Conference Series: Earth Environtal Science*. 2010, 12, 012087, s. 8.
- [9] HIMR, D. – HABÁN, V. – POCHYLÝ, F. Sound Speed in the Mixture Water-Air. V *Engineering Mechanics*, 255, s. 393–401, Svratka, Czech Republic, May 2009. ISBN 978-80-86246-35-2.
- [10] HIMR, D. – HABÁN, V. – POCHYLÝ, F. Sound speed in the fluid-gas mixture. V RUDOLF, P. (Ed.) *Proceedings of the 3rd IAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems*, P7, s. 561–570, Brno, Czech Republic, October 2009. Brno University of Technology. ISBN 978-80-214-3947-4, 1st edition.
- [11] HORSKÝ, L. Studium absorpce kyslíku v kapalinách. Diplomová práce, VUT v Brně FCH, 2000.
- [12] IAPWS. *Equations of IAPWS-IF97* [online]. International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS), 2008. [cit. 1.3.2009]. Dostupné z: <<http://www.iapws.org>>.
- [13] IDĚLČIK, I. E. *Spravočnik po gidravličeskim soprotivlenijam*. Moskva : Mašinostroje, 1975. v ruštině.
- [14] LEVEQUE, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. New York, NY : Cambridge University Press, 2002. ISBN 978-0-521-00924-9.
- [15] PACIGA, A. – PRIKKEL, K. *Nestacionárne pomery v hydraulických systémoch*. Bratislava : VEDA Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, 1988.
- [16] PANKO, M. Tlumení tlakových pulsací v pružných potrubích. Diplomová práce, VUT v Brně FSI, 2008. VUT-EU-ODDI-13303-07-08. Vedoucí práce: Ing. Vladimír Habán, Ph.D.



- [17] PÍRKO, Z. – VEIT, J. *Laplaceova transformace*. 2. opravené vydání. Praha : SNTL/ALFA, 1972.
- [18] POCHYLÝ, F. *Dynamika tekutinových systémů*. 1. vydání. Brno : VUT, 1990. ISBN 80-214-0139-7.
- [19] REKTORYS, K. et al. *Přehled užití matematiky*. Praha : SNTL, 1963.
- [20] VARCHOLA, M. K otázce výpočtu délkových odporov. *Mechanical engineering journal*. jún 2009, mimoradne vydanie, s. 274–278. ISSN 1335-2938.
- [21] VARCHOLA, M. – KNÍŽAT, B. – TÓTH, P. *Hydraulic Solution of Pipeline Systems*. Bratislava : STU, 2010. ISBN 978-80-227-3243-7.
- [22] VÍTKOVSKÝ, J. et al. Advances in Unsteady Friction Modelling in Transient Pipe Flow. V *Proceedings of the 8th International Conference on Pressure Surges*, s. 471–482, Netherlands, 2000.
- [23] VÍTKOVSKÝ, J. et al. Systematic Evaluation of One-Dimensional Unsteady Friction Models in Simple Pipelines. *Journal of hydraulic engineering*. July 2006, s. 696–708.
- [24] ZÁRUBA, J. *Water Hammer in Pipe-Line Systems*. Prague : Academia, 1993. ISBN 80-200-0363-0.

## Seznam nejdůležitějších symbolů

Symbol	Jednotka	Popis
$b$	[Pa·s]	tlumení materiálu potrubí
$b_2$	[Pa·s]	druhá viskozita kapaliny
$C$	[m <sup>5</sup> /N]	kapacita akumulátoru
$c$	[m/s]	rychlost proudění kapaliny
$c_k$	[-]	součinitel časového kroku
$D$	[m]	průměr potrubí
$D_o$	[m]	průměr oběžného kola
$E$	[Pa]	modul pružnosti v tahu
$f$	[Hz]	frekvence
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	gravitační zrychlení
$H$	[m]	výška
$H_H$	[m]	výška vyrovnávací nádrže
$H_\nu$	[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	koefficient druhé kinematické viskozity
$J$	[kg·m <sup>2</sup> ]	moment setrvačnosti
$k$	[Pa]	modul pružnosti
$K_k$	[Pa]	modul pružnosti kapaliny
$K_p$	[Pa]	modul pružnosti plynu
$K_v$	[m <sup>3</sup> /s]	průtokový součinitel
$M$	[Nm]	moment
$M_p$	[-]	hmotnostní zlomek plynu
$m$	[1/s]	paměťová funkce
$m_k$	[kg]	hmotnost kapaliny
$m_p$	[kg]	hmotnost plynu
$n$	[-]	polytropický exponent
$n$	[ot/s]	otáčky
$n_i$	[-]	normálový vektor z povrchu kapaliny
$n_i^*$	[-]	normálový vektor z povrchu potrubí
$O_k$	[-]	objemový zlomek kapaliny
$O_p$	[-]	objemový zlomek plynu
$p$	[Pa]	tlak
$P$	[m <sup>2</sup> ]	plocha vnitřního povrchu potrubí
$Q$	[m <sup>3</sup> /s]	průtok
$r$	[J/(kg·K)]	specifická plynová konstanta
$R$	[1/m <sup>4</sup> ]	odpor
$Ra$	[m]	drsnost stěny potrubí
$Re$	[-]	Reynoldsovo číslo
$S$	[m <sup>2</sup> ]	plocha
$S_H$	[m <sup>2</sup> ]	plocha hladiny ve vyrovnávací nádrži
$S_T$	[m <sup>2</sup> ]	plocha vnějšího povrchu potrubí
$T$	[K]	teplota
$T_K$	[Pa]	smykové napětí
$t$	[s]	čas
$u_i$	[m]	deformace stěny potrubí
$V$	[m <sup>3</sup> ]	objem

Symbol	Jednotka	Popis
$V_k$	[m <sup>3</sup> ]	objem kapaliny
$V_p$	[m <sup>3</sup> ]	objem plynu
$V_T$	[m <sup>3</sup> ]	objem stěny potrubí
$v$	[m/s]	rychlost stěny trubice
$v_0$	[m/s]	rychlost zvuku
$v_{0k}$	[m/s]	rychlost zvuku v kapalině bez plynu
$v_{0p}$	[m/s]	adiabatická rychlost zvuku v plynu
$x_i$	[m]	prostorová souřadnice
$z$	[-]	relativní otevření ventilu
$\alpha$	[rad]	úhel sklonu potrubí
$\Delta$	[m]	tloušťka stěny potrubí
$\Delta p_{ref}$	[Pa]	referenční hodnota tlaku (10 <sup>5</sup> Pa)
$\Delta t$	[s]	časový krok výpočtu
$\Delta V$	[m <sup>3</sup> ]	objem kapaliny v elementu potrubí
$\Delta x$	[m]	délkový krok výpočtu
$\delta_{ij}$	[-]	Kroneckerův tenzor
$\varepsilon$	[-]	poměrná deformace stěny potrubí
$\varepsilon_{ijk}$	[-]	Levi-Civitův tenzor
$\eta$	[Pa·s]	dynamická viskozita
$\kappa$	[-]	adiabatický exponent
$\lambda$	[-]	součinitel délkových ztrát
$\lambda_n$	[-]	součinitel nestacionárních délkových ztrát
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	kinematická viskozita
$\nu_2$	[m <sup>2</sup> /s]	druhá kinematická viskozita
$\Pi_{ij}$	[Pa]	nevratná část tenzoru napětí
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	hustota
$\rho_{ref}$	[kg/m <sup>3</sup> ]	referenční hustota (1000 kg/m <sup>3</sup> )
$\rho_T$	[kg/m <sup>3</sup> ]	hustota materiálu potrubí
$\Sigma_{ij}$	[Pa]	tenzor napětí potrubí
$\sigma_{ij}$	[Pa]	tenzor normálových napětí potrubí